

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ СТРАТЕГИИ ДЛЯ ПРОИЗВОДСТВЕННО-ФИНАНСОВОЙ МОДЕЛИ ФИРМЫ

ГАБАСОВА О. Р.

Белорусский национальный технический университет

Статья посвящена исследованию оптимальной политики одной производственно-финансовой модели фирмы. Эта задача относится к динамической теории фирмы, которая стала активно развиваться во второй половине XX в. В конце 1960-х гг. Д. В. Юргенсон (D. W. Jorgenson) (1967) получил первые результаты по оптимальному управлению динамическими моделями фирмы на конечном промежутке времени с помощью принципа максимума Понтрягина [1, 2]. В 1968 г. Дж. Р. Гулд (J. R. Gould), учитывая затраты на инвестиции, смог решить задачу Юргенсона для всех объемов начального капитала. Основой многих исследований явились модели Людвига [3] и Лесорна – Лебана [4]. Так, О. Хилтен, П. М. Корт, П. Лун и другие исследовали указанные модели с помощью необходимых условий оптимальности [5]. Ниже для производственно-финансовой модели предложен метод построения оптимальной стратегии, основанный на решении задачи оптимального управления. Для специального класса функций обсуждаются возможные ситуации (дешевый, дорогой кредиты), проведен анализ соответствующей задачи оптимального управления для первого случая и показано, что оптимальное решение удовлетворяет магистральному принципу.

Рассмотрим фирму, функционирующую на конечном промежутке времени $T = [0, z]$, z – горизонт планирования. Располагая в момент $t \in T$ капиталом $K = K(t)$, фирма производит однородную продукцию $Q = qK$ (q – производительность капитала). Предполагается, что произведенная продукция реализуется на рынке, принося выручку $S = S(Q)$. Капитал фирмы складывается из капитала акционеров $X = X(t)$ и

кредита $Y = Y(t)$, размер которого ограничен и удовлетворяет неравенствам $0 \leq Y(t) \leq kX(t)$ (k – отношение максимального кредита к собственному капиталу). В каждый момент времени фирма тратит на зарплату $wL(t)$ ($w > 0$ – ставка заработной платы, $L(t) = lK(t)$ – численность рабочих, $l > 0$ – трудоемкость реализации единицы капитала), делает амортизационные отчисления $aK(t)$ ($a > 0$ – норма амортизации), выплачивает проценты по кредиту $rY(t)$ ($r > 0$ – константа). Обозначим через $D = D(t)$, $I = I(t)$ значения дивидендов и инвестиций в момент времени t соответственно. Если считать, что рассматриваемая фирма акционерная, то в этом случае ценность фирмы представляет собой взвешенную сумму дисконтированного объема накопленного чистого капитала $X(z)$ и объема выплаченных дисконтированных дивидендов. Имеем

$$e^{-iz} X(z) + \int_0^z e^{-it} D(t) dt = V(D, I).$$

Оптимальной программной назовем такую политику $D^0(t)$, $I^0(t)$, $t \in T$ (такие допустимые программные управления), при которой ценность фирмы $V(D, I)$ максимальна.

Имеем следующую задачу оптимального управления:

$$V(D, I, K_1) = e^{-iz} X(z) + \int_0^z e^{-it} D(t) dt \rightarrow \max; \quad (1)$$

$$\dot{X} = rX + S - (a + r + wl)K - D, \quad \dot{K} =$$

$$= -aK + I; \quad X(0) = X_0; \quad K(0) = K_0;$$

$$0 \leq D(t) \leq D_{\max}; \quad I_{\min} \leq I(t) \leq I_{\max};$$

$$X(t) \leq K(t) \leq (1 + k)X(t); \quad t \in T,$$

где $X(t), K(t), t \in T$, – фазовые переменные, $I(t), D(t), t \in T$, – переменные управления.

Как видно из (1), в задаче имеются прямые ограничения на управления и ограничения на фазовые переменные.

Введем предположения: $A_1) i \neq r$; $A_2) z > 0$ – достаточно большое положительное число; $A_3) X_* < X_0 < X^* < \infty$, X_* – достаточно малое положительное число; $A_4) \circ (|\Delta K|) = S(q(K + \Delta K)) - S(qK) - \Delta K$; $A_5) 0 < Q(t) < Q_a$; $Q_a: dS/dQ = a/q_1$; $A_5) S(Q), Q > 0$, непрерывна вместе с первой и второй производными, причем $S(0) = 0, \partial S/\partial Q > 0, \partial^2 S/\partial Q^2 < 0, Q > 0; \partial S/\partial Q \rightarrow \infty, Q \rightarrow 0$.

Задача (1) удовлетворяет условиям известных теорем о существовании оптимальных управлений [6]. Поэтому если для некоторого начального состояния (X_0, K_0) найдутся допустимые управления $D(t | X_0, K_0), I(t | X_0, K_0), t \in T$, то для него существуют и оптимальные программные управления $D^0(t | X_0, K_0), I^0(t | X_0, K_0), t \in T$. Оптимальные программные управления редко используются при фактическом управлении реальными объектами, так как они не могут учитывать действие неизвестных возмущений, возникающих в реальных процессах управления. Пусть Ω_τ – множество таких начальных состояний (P, R) , для которых существуют оптимальные программные управления. Функции:

$$D^0(\tau, P, R) = D^0(\tau | P, R); I^0(\tau, P) = I^0(\tau | P, R);$$

$$(P, R) \in \Omega_\tau, \tau \in T,$$

называются оптимальными управлениями типа обратной связи, т. е. позиционным решением (1).

Главную роль в построении позиционных решений задачи оптимального управления играют магистральные задачи, которые получаются из (1) после удаления ограничений на инвестиции, верхнего ограничения на дивиденды и введения специальных значений начальных состояний. Магистраль – такая кривая, по отношению к которой оптимальная траектория ведет себя следующим образом: 1) на начальном и конечном участках далека от кривой;

2) на среднем участке или совпадает с кривой (закон магистрали в сильной форме), или близка к ней (слабая форма закона магистрали); 3) относительное время движение по среднему участку (по отношению к продолжительности всего процесса) тем больше, а радиус окрестности кривой, в которой находится средний участок оптимальной траектории (в случае слабой магистрали), тем меньше, чем больше продолжительность процесса управления. Оказываются, магистрали являются оптимальными траекториями при достаточно большом z лишь для начальных состояний X_0, K_0 , лежащих на одной из изолированных траекторий $X^a(t), K^a(t), t \in T$. Для остальных допустимых начальных состояний магистральная задача (1) не имеет решения в классе кусочно-непрерывных управлений. С целью формирования оптимальной политики фирмы (1) для всех допустимых начальных состояний расширим класс доступных управлений и будем считать, что он состоит из функций вида

$$\tilde{D}(t) = D_0 \delta(t) + D(t), \tilde{I}(t) = I_0 \delta(t) + I(t), t \in T, \quad (2)$$

где D_0, I_0 – параметры обобщенных управлений, подлежащие вычислению; $\delta(t), t \in T$, – δ -функция Дирака; $D(t), I(t), t \in T$, – кусочно-непрерывные функции. С экономической точки зрения, расширение класса доступных управлений до управлений вида (2) означает, что в начальный момент $t = 0$ для каждого начального состояния X_0, K_0 имеется возможность мгновенно выдать конечный объем дивидендов и произвести инвестирование в конечном объеме. Конкретные (допустимые) значения для указанных конечных изменений определяются фазовыми ограничениями и условием неотрицательности дивидендов $X_0 - D_0 \leq K_0 + I_0 \leq (1+k)(X_0 - D_0)$; $X_0 - D_0 \geq X_*$; $D \geq 0$. При таких значениях параметров траектория исходной задачи с начальным условием $X(-0) = X_0, K(-0) = K_0$ под воздействием управлений (2) в начальный момент $t = 0$ совершает скачок и в момент $t = +0$ оказывается в состоянии $X(+0), K(+0)$, которое удовлетворяет ограничениям $X_* \leq X(+0) \leq X_0$; $X(+0) \leq K(+0) \leq (1+k)X(+0)$. Заменим (1), (2) на эквивалент-

ную задачу оптимального управления в исходном классе доступных управлений, но с измененными условиями на левом конце допустимых траекторий:

$$X_0 - X(0) + e^{-iz} X(z) + \int_0^z e^{-it} D(t) dt \rightarrow \max; \quad (3)$$

$$\dot{X} = rX + S - (a + r + wl)K - D, \quad \dot{K} = -aK + I; \quad X_* \leq X(0) \leq X_0; \quad X(0) \leq K(0) \leq (1+k)X(0);$$

$$0 \leq D(t); \quad X(t) \leq K(t) \leq (1+k)X(t); \quad t \in T.$$

Магистральная задача (3) исследуется с помощью достаточных условий оптимальности, доказанных в [7]. Отметим, что традиционная функция Гамильтона – Понтрягина неудобна для изучения оптимальных решений. Поэтому вместо стандартных $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ вводятся новые сопряженные переменные $\lambda_1(t) = e^{it}\psi_1(t)$, $\lambda_2(t) = e^{it}\psi_2(t)$, $t \in T$.

Сопряженная система имеет вид

$$\dot{\lambda}_1 = \lambda_1(i - r) + v_1 - v_2(1+k), \quad \dot{\lambda}_2 = (i + a + wl)\lambda_2 - \lambda_1 \times [dS/dQ - (a + r)] - v_1 + v_2.$$

Теорема. Управления $D(t)$, $I(t)$, $t \in T$, траектория $(X(t), K(t))$, $t \in T$, оптимальны в задаче (3) для допустимого начального состояния $(X(0), K(0))$, если найдутся такие кусочно-непрерывные функции $\mu(t)$, $v_1(t)$, $v_2(t)$, $t \in T$, непрерывные функции $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $t \in T$, числа $\xi_1, \dots, \xi_4$, на которых выполняются соотношения: 1) условия трансверсальности на левом конце траектории: $-1 - \xi_1 - \xi_2 + \xi_3(1+k) + \xi_4 - \lambda_1(+0) = 0$, $\xi_2 - \xi_3 + \lambda_2(+0) = 0$; 2) условия трансверсальности на правом конце траектории: $\lambda_1(z) = 1$, $\lambda_2(z) = 0$; 3) условия неотрицательности: $\mu(t) \geq 0$; $v_1(t) \geq 0$; $v_2(t) \geq 0$, $t \in T$; $\xi_1 \geq 0$; $\xi_2 \geq 0$; $\xi_3 \geq 0$; $\xi_4 \geq 0$; 4) условия дополняющей нежесткости $\xi_1(X_0 - X(0)) = 0$, $\xi_2(K(0) - X(0)) = 0$, $\xi_3((1+k)X(0) - K(0)) = 0$, $\xi_4(X(0) - X_*) = 0$, $\mu(t)D(t) = 0$; $v_1(t)(K(t) - X(t)) = 0$; $v_2(t)((1+k) \times X(t) - K(t)) = 0$; 5) условия стационарности:

$$1 - \lambda_1(t) + \mu(t) = 0; \quad \lambda_2(t) = 0, t \in T; \quad 6) \text{ условие во-} \\ \text{гнутости } \int_0^z \lambda_1(t) \circ_1 (\Delta K(t)) dt \leq 0.$$

Используем эту теорему для синтеза оптимальной политики фирмы в задачах (1)...(3). Оптимальная траектория магистральной задачи для (1) определяется набором функциональных множителей Лагранжа $\mu(t)$, $v_1(t)$, $v_2(t)$, $t \in T$, которые вдоль траектории принимают либо положительные, либо нулевые значения. Часть оптимальной траектории, на которой ни один из множителей не изменяет своего значения с положительного на нулевое или, наоборот, с нулевого на положительное, будем называть дугой. Количество дуг, составляющих оптимальную траекторию в рассматриваемой задаче, равно 8. Но три из них в силу сделанных в начале предположений и условий теоремы не реализуемы. Для того чтобы построить магистралу, следует проанализировать элементы задачи на дугах. Можно доказать, что множество начальных состояний X_0, K_0 , для которых существуют допустимые управления задачи (1), (2) в расширенном классе доступных управлений или задачи (3) в исходном классе доступных управлений, состоит из точек (X_0, K_0) , принадлежащих множеству:

$$\Omega = \{(X_0, K_0) : X_* \leq X_0 \leq X^*, X_0 \leq K_0 \leq (1+k)X_0\} \quad (\text{рис. 1, 2}).$$

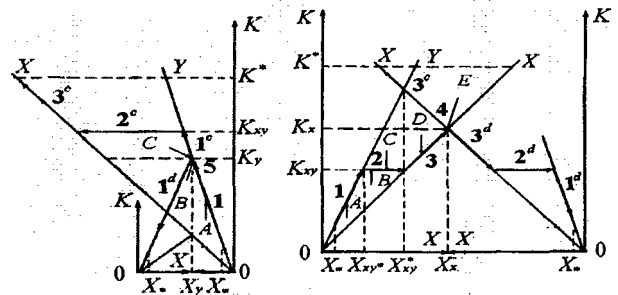


Рис. 1

Рис. 2

Возможны две ситуации: ситуация дешевого (рис. 1) и дорогого (рис. 2) кредитов.

Рассмотрим ситуацию дешевого кредита. Множество допустимых начальных Ω состояний разобьем на части A, B, C (рис. 1). Здесь $C_{xy} = a + r + wl$; $C_y = a + i/(1+k) + kr/(1+k) + wl$;

$$C_x = a + i + wl; \quad K_{xy} : \partial S / \partial K = C_{xy}; \quad X_{xy}^* = K_{xy} / (1+k);$$

$$X_{xy}^* = K_{xy}; \quad K_x : \partial S / \partial K = C_x, X_x = K_x; \quad K_y : \partial S / \partial K = C_y;$$

$$X_y = K_y / (1+k); \quad K^* : S(qK) = wlK + I_{\min}; \quad X^* = K^*.$$

Для произвольных точек из каждой области A , B , C допустимые траектории складываются из дуг:

$$A = \left(\begin{array}{l} X(0) = X_0, K(0) = (1+k)X_0, \\ D_0 = 0, I_0 = (1+k)X_0 - K_0 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 1^c \rightarrow 2^c \rightarrow 3^c;$$

$$B, C = \left(\begin{array}{l} X(0) = X_y, K(0) = K_y, \\ D_0 = X_y - X_0, I_0 = K_y - K_0 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow 5 \rightarrow 1^c \rightarrow 2^c \rightarrow 3^c. \quad (4)$$

Скачки фазовых переменных задач (1), (2) равны: $A : \Delta X(0) = 0, \Delta K(0) = (1+k)X_0 - K_0$; $B, C : \Delta X(0) = X_y - X_0; \Delta K(0) = K_y - K_0$. Для доказательства оптимальности траекторий:

$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 1^c \rightarrow 2^c \rightarrow 3^c, \quad 5 \rightarrow 1^c \rightarrow 2^c \rightarrow 3^c,$$

$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 1^d \quad (5)$$

в задаче (3) дополнительно проверяются условия оптимальности (условия трансверсальности) на их левых концах. (Дуги $1^c - 3^c$ суть дуги 1–3 для ситуации дорогого кредита [8]; а дуга 1^d построена специально, чтобы на ней выполнялись достаточные условия оптимальности.)

Экономическая интерпретация оптимальной политики фирмы.

1. $(X_0, K_0) \in A$. Фирма в начальный момент $t = 0$ с помощью кредита расширяет производство с начального капитала K_0 до максимально возможного уровня $(1+k)X_0$ и далее следует закону магистрали. 2. $(X_0, K_0) \in B$. В начальный момент фирма выдает дивиденды $X_y - X_0$ и расширяет производство с K_0 до K_y . 3. $(X_0, K_0) \in C$. В начальный момент фирма выдает дивиденды $X_y - X_0$, при этом сокращает объем общего капитала с K_0 до K_y .

Перейдем к синтезу оптимальных управлений типа обратной связи (оптимальной политике фирмы). Обозначим через $t_0 \leq \infty$ наи-

больший момент времени, когда, двигаясь по магистрали, можно впервые из множества Ω достичь состояния блаженства – состояния, при котором сохраняется оптимальный уровень производства при данных рыночных отношениях. Нетрудно проверить, что если $z \geq t_0$, то

$$D^0(\tau | \tau, P) = D^0(0, P) = D^0(P), I^0(\tau | \tau, I) =$$

$$= I^0(0, P) = I^0(P),$$

если

$$0 \leq \tau \leq t_0. \quad (6)$$

Свойство (6) означает, что определенные в (4) оптимальные программные управления не зависят от τ и, следовательно, правила (6) определяют стратегию фирмы (оптимальные позиционные решения определены для всех допустимых начальных состояний). Случай дорогого кредита исследуется аналогично.

ВЫВОД

В статье предложен метод построения оптимальной стратегии фирмы, поведение которой описывается системой линейных дифференциальных уравнений с двумя управляющими воздействиями (дивиденды и инвестиции). С помощью достаточных условий оптимальности управлений доказано, что оптимальная стратегия фирмы подчиняется магистральному принципу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Jorgenson D. W. The theory of investment behavior // Determinants of investment behavior. R. Ferber (ed.) – N.Y. Columbia Univ. Press, 1967.
2. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. – М.: Прогресс, 1975. – 607 с.
3. Ludwig T. Optimale Expansionspfade der Unternehmung. – Wiesbaden: Gabler, 1978. – 217 p.
4. Lesourne J., Leban R. La substitution capital-travail au cours de la croissance de l'entreprise // Revue d'economie politique. – 1978. – Vol. 88. – P. 540–564.
5. Hilten O. van, Kort P. M., Loon P. J. J. M. van. Dynamic policies of the firm: an optimal control approach. – Berlin: Springer, 1993. – 445 p.
6. Понтрягин Л. С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1976.
7. Габасова О. Р., Габасов Р., Дмитрук Н. М. Синтез оптимальной политики для производственно-финансовой модели фирмы. I. Построение магистралей // Автомат. и телемех. – 1998. – № 9. – С. 100–117.
8. Gabasova O. R. An optimal control problem originating from the dynamic theory of the firm // The 13th International Conference on Systems Science: Book of Proc. – Wroclaw, 1998. – Vol. III. – P. 270–277.