

СОСТОЯНИЯ С КОНЕЧНОЙ ЭНЕРГИЕЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМАХ

Канд. физ.-мат. наук, доц. КНЯЗЕВ М. А.

Белорусский национальный технический университет

Для точного описания физических процессов в рамках некоторой выбранной модели необходимо учитывать реальные свойства рассматриваемой системы. К их числу относятся, например, процессы трения и затухания, присутствующие в подавляющем большинстве систем. Следует отметить, что в результате учета такого рода диссипативных процессов система перестает быть консервативной. В нелинейных системах это, в свою очередь, может приводить к проблемам с определением энергии состояния. Возникают ситуации, в которых энергию состояния можно считать бесконечной. В то же время в таких системах можно построить состояния с конечной энергией, физическая интерпретация которых не вызывает затруднений; причем такие состояния возможны как при линейной, так и нелинейной диссипации. Рассмотрим данную проблему на примере нелинейной модели, описываемой скалярной теорией ϕ^4 .

При отсутствии диссипации для случая плоской симметрии и размерности $(1 + 1)$ уравнение движения теории ϕ^4 имеет вид

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} - \phi + \phi^3 = 0. \quad (1)$$

Здесь $\phi_{xx} = \partial^2 \phi / \partial x^2$ и т. д.

Поскольку нас интересуют только диссипативные процессы, отличными от единицы будем считать только те коэффициенты, которые характеризуют диссипацию. Все остальные коэффициенты в уравнениях движения принимаем равными единице. Данное уравнение имеет только одно топологически нетривиальное решение [1]. Это решение в виде одиночного кинка (антикинка)

$$\phi(x, t) = \tanh \left(\frac{x - vt + x_0}{\sqrt{2(1 - v^2)}} \right). \quad (2)$$

Здесь v – скорость кинка, $|v| < 1$; начальная фаза x_0 характеризует положение кинка в начальный момент времени; считаем, что $c = 1$.

Антикинку соответствует решение, описывающее движение в противоположном направлении. Одиночный кинк обладает конечной энергией $E = 2\sqrt{2}/3\sqrt{1 - v^2}$.

Поскольку других топологически нетривиальных решений в нелинейной модели с уравнением движения (1) нет, это уравнение относится к неинтегрируемым [2]. В отличие от, например, интегрируемого нелинейного уравнения Кортевега – де Фриза, в котором распыление волнового пакета из-за дисперсии компенсируется его сжатием вследствие нелинейности, в уравнении (1) такой баланс отсутствует. Однако его можно установить, если учесть диссипативные процессы. Наиболее просто это сделать, введя в уравнение движения член, пропорциональный первой производной по времени:

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + \alpha \phi_t - \phi + \phi^3 = 0. \quad (3)$$

Здесь α – коэффициент диссипации.

Уравнение (3) относится к интегрируемым и для него можно построить бесконечное множество решений, описывающих топологически нетривиальные состояния [3]. Эти решения, наряду с одиночными кинками и антикинками, будут включать так называемые связанные состояния, которые формируются в результате нелинейного взаимодействия произвольного

числа кинков, антикинков, а также кинков и антикинков. Например, если одиночный кинк уравнения (3) имеет вид

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{2} \left[1 + \tanh \left(\frac{kx - \omega t + \eta^0}{2} \right) \right], \quad (4)$$

где $k = \sqrt{9 + 2\alpha^2}$; $\omega = -3/2\alpha$; η^0 – начальная фаза, то решение, описывающее связанное состояние N кинков, записывается следующим образом (считаем начальные фазы всех кинков равными нулю):

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{(N+1) \tanh \left(\frac{kx - \omega t}{2} \right) + N - 1}{N + 1 + (N-1) \tanh \left(\frac{kx - \omega t}{2} \right)} \right]. \quad (5)$$

Сравнение решений (2) и (4) для одиночных кинков показывает, что в результате учета диссипативных процессов меняются как профиль полевой конфигурации, так и область ее изменения.

Система, описываемая (3), не является консервативной и ее энергия уже не будет сохраняться. Для таких систем можно вычислить только скорость потери энергии dE/dt в некотором состоянии. Используя подход, предложенный в [4], для одиночного кинка (4) получим

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{3}{4\sqrt{9+2\alpha^2}}. \quad (6)$$

Согласно (6), излучаемая при движении энергия линейно растет со временем, а сам процесс излучения – стационарный. Учет диссипации привел к тому, что в отличие от состояния (2), обладающего конечной энергией, энергия состояния (4) оказывается бесконечно велика. Хотя система, описываемая уравнением (3), и является незамкнутой, но внешние источники энергии в этом уравнении отсутствуют. Можно предположить: так как кинк устойчиво распространяется в диссипативной среде, а это вытекает из того, что скорость его движения фиксирована, должна иметь место непрерывная подпитка данного состояния за счет энергии

бесконечной среды. Физическая интерпретация такого рода частицеподобных объектов в рамках классической теории поля представляется проблематичной.

В то же время уравнение (3) обладает решениями, энергия которых конечна. Такие решения можно построить, если рассматривать связанные состояния, образованные в результате взаимодействия двух состояний, принадлежащих к различным топологическим классам, например кинка и антикинка. Используя метод решения нелинейных уравнений математической физики, предложенный в [5, 6], можно построить частное решение уравнения (3), описывающее связанное состояние кинка и антикинка. Это решение имеет вид

$$\varphi(x, t) = \frac{P(x, t)}{Q(x, t)}, \quad (7)$$

где

$$P(x, t) = (6 + \alpha^2) [\exp(kx - \omega t + \eta_1^0) - \exp(-kx - \omega t + \eta_2^0)];$$

$$Q(x, t) = (6 + \alpha^2) [1 + \exp(kx - \omega t + \eta_1^0) - \exp(-kx - \omega t + \eta_2^0)] + 6 \exp(-2\omega t + \eta_1^0 + \eta_2^0).$$

Параметры k и ω определены выше, η_1^0 и η_2^0 – начальные фазы одночастичных функций для связанного состояния (вообще говоря, они не совпадают с начальными фазами кинка и антикинка). Результаты вычислительных экспериментов показывают, что для связанного состояния кинка и антикинка с ростом диссипации увеличивается область взаимодействия, в которой происходит формирование такого состояния. Кроме того, область изменения функции для соотношения (7) совпадает с областью изменения функции для одиночного кинка при отсутствии диссипации. Это можно рассматривать как указание на то, что энергия рассматриваемого связанного состояния должна быть конечной.

Вычисление скорости потери энергии для решения (7) приводит к результату

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2A\alpha}{k} \left[\frac{14C^3 - B^3 - 23B^2C - 2BC^2}{6(B+C)^2(B-C)^3C^2} + \frac{8C^2 - 7B^2 - BC}{(B+C)^{5/2}(B-C)^{7/2}} \operatorname{atanh} \sqrt{\frac{B-C}{B+C}} \right], \quad (8)$$

где

$$A = 2\omega(6 + \alpha^2) \exp(-\omega t) [6 \exp(-2\omega t) - 6 - \alpha^2];$$

$$B = 6 + \alpha^2 + 6 \exp(-2\omega t);$$

$$C = 2(6 + \alpha^2) \exp(-\omega t).$$

Энергия, которая рассеивается в процессе движения, конечна, несмотря на то, что состояние (7) построено для неконсервативной системы. Данный результат можно рассматривать как классический аналог перенормировки, когда взаимное вычитание в процессе формирования связанного состояния двух бесконечностей приводит к конечному результату.

Еще одна возможность формирования в неконсервативной системе состояний с конечной энергией заключается в одновременном учете наряду с линейной диссипацией энергии эффектов нелинейной диссипации. Рассмотрим простейший случай, когда эта нелинейность определяется квадратом первой производной по времени. Уравнение движения в этом случае принимает вид

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \alpha \varphi_t + \beta \varphi_t^2 - \varphi + \varphi^3 = 0, \quad (9)$$

где β – положительная константа. Для данного уравнения, используя метод, предложенный в [5, 6], можно построить решение, описывающее состояние в виде одиночного кинка, которое при некоторых дополнительных условиях будет распространяться в среде без потери энергии. Это решение имеет такой же вид, как и решение (4), но его параметры будут определяться следующим образом:

$$\omega = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 3\beta}}{\beta};$$

$$k = \left(2\alpha^2 - \alpha^2\beta - \beta^2 + 3\beta - \alpha\sqrt{\alpha^2 + 3\beta}(2-\beta)^{1/2} \right) / \beta. \quad (10)$$

Данное решение является устойчивым, поскольку параметры k и ω имеют фиксированные значения. Если теперь вычислить скорость потери энергии, то получим

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{5\alpha - \beta\omega}{30k}, \quad (11)$$

откуда следует, что при $\omega = 5\alpha/\beta$ энергия состояния изменяться не будет. Учитывая (10), получим, что в этом случае:

$$\beta = 5\alpha^2; \quad k^2 = 1 - 2\alpha^2. \quad (12)$$

Второе из уравнений (12) позволяет найти дополнительное условие, при котором в системе, описываемой уравнением движения (9), топологически нетривиальное состояние будет распространяться без потери энергии: $\alpha < 1/\sqrt{2}$. Такая ситуация становится возможной благодаря тому, что при этом условии устанавливается баланс между линейными и нелинейными процессами в системе.

Полученные результаты имеют практическое приложение в биофизике и физике твердого тела. Модель (3) широко применяется для исследования динамики биологических материалов, представляющих суспензию конгломератов больших молекул в жидкой среде [7, 8]. К числу таких материалов относится кровь. Наличие в ней железа позволяет рассматривать ее как ферромагнетик, в котором можно формировать доменную структуру.

ВЫВОД

Результаты данной работы указывают на то, что эта структура может быть создана таким образом, что ее движение (а значит, и перенос содержащихся в крови веществ или лечебных препаратов) будет осуществляться без потерь. Модели, учитывающие одновременно линейное и нелинейное затухания, применяются для описания переходов Джозефсона, волн плотности заряда и структурных фазовых переходов [9...11]. Существенное значение имеет тот факт, что для подобного рода неконсервативных систем не только показана принципиальная возможность осуществления, например перехода Джозефсона без потерь, что само по себе важно в микроэлектронике, но и получены

конкретные условия для параметров системы, при которых этот переход происходит.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Солитоны и нелинейные волновые уравнения** / Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис. – М.: Мир, 1988. – 694 с.
2. **Ньюэлл А.** Солитоны в математике и физике. – М.: Мир, 1989. – 326 с.
3. **Князев М. А.** Формирование связанных состояний в скалярной теории Φ^4 // Доклады НАН Беларуси. – 2000. – Т. 44, № 2. – С. 38–41.
4. **Geike J.** Comment on «Kink soliton and friction» // Phys. Lett. A. – 1986. – V. 116, № 5. – P. 221–223.
5. **Князев М. А.** Прямой метод построения солитоноподобных решений нелинейных уравнений // Доклады АН Беларуси. – 1996. – Т. 40, № 4. – С. 64–67.

6. **Knyazev M. A.** A method for solving nonlinear equations // Rep. Math. Phys. – 1997. – V. 40, № 3. – P. 493–500.

7. **Biltz H., Büttner H., Fröhlich H.** Electrolet model for the collective behaviour of biological systems // Z. Naturforsch. – 1981. – V. 36b, № 2. – P. 208–212.

8. **Lal P.** Kink soliton and friction // Phys. Lett. A. – 1985. – V. 111, № 8, 9. – P. 389–390.

9. **Collins M. A., Blumen A., Currie J. F., Ross J.** Dynamics of domain walls in ferrodistorive materials // Phys. Rev. B. – 1979. – V. 19, № 7. – P. 3630–3644.

10. **González J. A., Guerrero L. E., Bellorín A.** Self-excited soliton motion // Phys. Rev. E. – 1996. – V. 54, № 2. – P. 1265–1273.

11. **González J. A. et al.** Resonance Phenomena of a Solitonlike Extended Objects in Bistable Potential // Phys. Rev. Lett. – 1998. – V. 80, № 7. – P. 1361–1364.

УДК 539.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ СИЛ В СУСТАВАХ ЧЕЛОВЕКА, МОДЕЛИРУЕМОГО АНТРОПОМОРФНЫМ МЕХАНИЗМОМ С АБСОЛЮТНО ТВЕРДЫМИ ЗВЕНЬЯМИ

Сост. **БОРИСОВ А. В.**

Белорусский национальный технический университет

Проблема определения моментов важна, потому что суставные моменты мышечных сил отражают процесс управления движением. Однако [1] прямых методов измерений моментов мышечных сил не существует. Но с помощью методов математического моделирования можно рассчитать моменты сил, локализованные в области крупных суставов. Экспериментальными данными для определения суставных моментов являются угловые перемещения в суставах. Их можно найти по кинограммам движения. Для определения суставных моментов мышечных необходимы уравнения движения механической модели человека. Задаваясь величинами моментов инерции сегментов тела человека, коэффициентами жесткости суставов и значениями углов закручивания сегментов, можно определить трансверальные моменты мышечных сил для суставов. В нашей модели

будем считать все суставы и звенья недеформируемыми [2, 3].

Возьмем приближенную к человеку одиннадцатизвенную модель механизма. Рассмотрим упрощенную модель плоского движения шагающего аппарата в одноопорной фазе (рис. 1). Введем неподвижную правую декартову систему координат xyz с началом в точке O и плоскостью xy , в которой происходит движение центра масс шагающего аппарата. Пусть механизм имеет две трехзвенные весомые ноги, две двухзвенные весомые руки и весомый корпус. На рис. 1 схематично изображен механизм и введены соответствующие обозначения.

Пусть $O_1A_1 = l_1$; $A_1B_1 = l_2$; $B_1C = l_3$; $B_2C = l_3$; $A_2B_2 = l_2$; $O_2A_2 = l_1$; $CG = l_7$; $DE_1 = l_8$; $E_1F_1 = l_9$; $DE_2 = l_8$; $E_2F_2 = l_9$ – длины звеньев аппарата. Центры масс находятся в точках: C_1 – стопы опорной ноги; C_2 – голени опорной ноги; C_3 –