

$$a_n + b_n = c \left(\frac{a_1}{a_{\frac{n}{n-1}}} + \frac{b_1}{b_{\frac{n}{n-1}}} \right).$$

Подставим сумму $a_n + b_n$ в неравенство (11):

$$c < c \left(\frac{a_1}{a_{\frac{n}{n-1}}} + \frac{b_1}{b_{\frac{n}{n-1}}} \right) < 2c \Rightarrow 1 < \left(\frac{a_1}{a_{\frac{n}{n-1}}} + \frac{b_1}{b_{\frac{n}{n-1}}} \right) < 2,$$

или

$$c^n < a_1^n + b_1^n < 2c^n,$$

что и доказывает нецелостность суммы $a_n + b_n$ относительно c .

ЛИТЕРАТУРА

1. Острик В. В., Цфасман М. А. Алгебраическая геометрия и теория чисел: Рациональные и эллиптические кривые // МЦНМО. – М., 2001. – 48 с.
2. Соколова Н. М. Геометрическая интерпретация многочленов Ньютона и проектирование направленных отрезков в многомерные пространства // Вестник БНТУ. – 2004. – № 5. – С. 57–59.

УДК 51(077)

СРЕДСТВА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ НА ФАКУЛЬТЕТАХ ИНЖЕНЕРНО-СТРОИТЕЛЬНОГО ПРОФИЛЯ

ГОЛУБЕВА И. А.

Белорусский национальный технический университет

Средства обучения, с одной стороны, являются дидактической категорией в системе обучения в целом. Поэтому их следует рассматривать во взаимодействии с такими элементами дидактической системы, как цели, содержание, методы и формы обучения. С другой стороны, это понятие является самостоятельной системной структурой и поэтому само состоит из определенных компонентов, находящихся в постоянном взаимодействии в ходе процесса обучения.

В настоящей работе средства обучения будем рассматривать как систему, функционирующую в процессе обучения математике во время проведения практических и семинарских занятий на факультетах инженерно-строительного профиля. Компоненты средств обучения и их взаимодействие определяются тем, на какой концепции базируется процесс обучения. Как отмечалось [1–3], обучение математике на факультетах нематематического профиля должно протекать с учетом той специальности, для которой излагается курс математики. Чтобы это реализовать, можно воспользоваться разработанной [4, гл. 1] концепцией профессиональной

направленности преподавания математики на факультетах нематематического профиля (ПНПМ). Это позволит не только избавиться от чрезмерного формализма в обучении математике, но и выяснить, какие дополнительные средства обучения необходимо разработать.

Традиционно в систему средств обучения математике входят, прежде всего, учебники и учебные пособия, а также всевозможные технические приспособления, среди которых наиболее востребованными являются калькуляторы, слайды, плакаты, компьютеры и т. п. При изложении курса математики для студентов нематематических специальностей средства обучения приобретают новые компоненты, соответствующие не только форме обучения, но и тому, для каких специальностей курс математики излагается. Если это инженерно-строительная специальность, то для проведения практических занятий уже не достаточно только формальных задач из курса математики. Необходимы прикладные задачи соответствующего содержания.

1. Нахождение уравнения кривой свешивания каната подвесного моста. Найти урав-

нение кривой, которую образует канат подвесного моста, если расстояние от нижней точки каната до моста равно y_0 . Весом каната пренебречь.

Решение

Начало декартовой прямоугольной системы координат поместим в центре проезжей части моста, а оси выберем так, как показано на рис. 1. Решение задачи будем искать в виде $y = y(x)$.

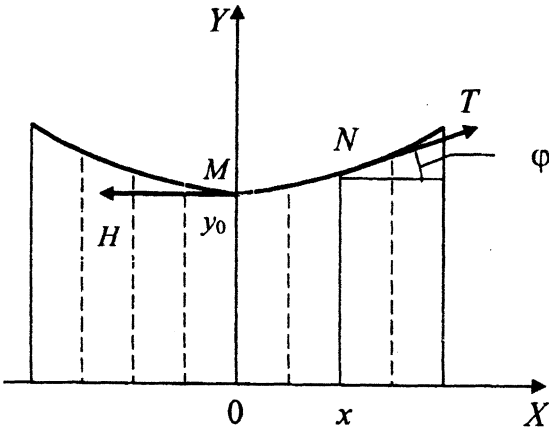


Рис. 1

Возьмем произвольное значение x и рассмотрим участок каната MN . Этот участок находится в равновесии под действием трех сил: горизонтального натяжения H в точке M , натяжения T , направленного по касательной к канату в точке N и образующего угол ϕ с положительным направлением оси OX , и веса P участка моста, заключенного между точками M и N : $P = kx$.

Согласно закону статики, по которому сумма проекций всех действующих сил на оси координат равна нулю, имеем:

$$T \sin \phi = kx;$$

$$T \cos \phi = H.$$

Разделим первое равенство на второе

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{k}{H} x.$$

Так как $\operatorname{tg} \phi = \frac{dy}{dx}$, окончательно получим

соотношение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k}{H} x, \quad (1)$$

связывающее независимую переменную x и производную искомой функции $y(x)$. Это дифференциальное уравнение первого порядка.

Интегрируя уравнение (1), находим

$$y(x) = \frac{k}{2H} x^2 + C. \quad (2)$$

Очевидно, что подстановка функции (2) в уравнение (1) превращает его в тождество. Следовательно, функция (2) является решением уравнения при любом постоянном C .

Поскольку $y = y_0$ при $x = 0$, подставив эти значения в выражение (2), получим $C = y_0$. Таким образом, уравнение искомой кривой имеет вид

$$y = \frac{k}{2H} x^2 + y_0.$$

Как видно из решения этой задачи, ее можно использовать в курсе математики при изучении темы «Дифференциальные уравнения».

2. Определение силы давления жидкости на плоскую поверхность. Определить силу избыточного давления p_1 на вертикальный затвор, имеющий форму параболического сегмента, если стягивающая его хорда, перпендикулярная к оси симметрии и равная a , находится на поверхности воды. Высота затвора h .

Решение

Выберем систему координат (рис. 2). Тогда $AB = a$; $OC = h$. При этом уравнение параболы будет $z = h - kx^2$. В точке B $x = \frac{a}{2}$; $z = 0$. Следовательно, $0 = h - k \frac{a^2}{4} \Rightarrow k = \frac{4h}{a^2}$.

$$\text{Тогда } z = h - \frac{4h}{a^2} x^2.$$

На глубине z выделим элементарный участок параболического сегмента $\Delta S = \Delta x \Delta z$. Согласно закону Паскаля сила давления жидкости Δp на площадку ΔS с глубиной погружения z равна

$$\Delta p = \gamma z \Delta S,$$

где γ – удельный вес жидкости.

В данной задаче $\gamma = 1$.

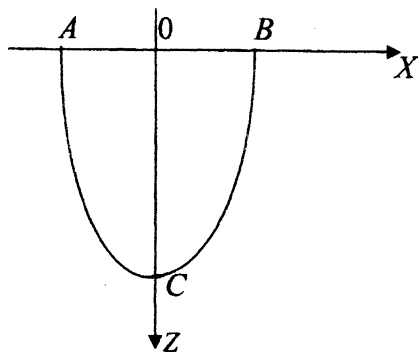


Рис. 2

Чтобы найти общее давление, необходимо все элементарные участки просуммировать и перейти к пределу, когда диаметр разбиения стремится к нулю. В результате получим двойной интеграл, т. е.

$$p = \iint_S z dS. \quad (3)$$

Отсюда, расставив пределы интегрирования, находим

$$p = \int_{-a/2}^{a/2} \left(\int_a^{h(1-\frac{4}{a^2}x^2)} z dz \right) dx = \frac{h^2}{2} \int_{-a/2}^{a/2} \left(1 - \frac{4}{a^2} x^2 \right)^2 dx = \frac{4}{15} ah^2.$$

Эту задачу целесообразно рассматривать при изучении темы «Двойные интегралы». Кроме того, ее следует использовать при обучении навыкам математического моделирования.

Вывод формулы (3) показывает, как с помощью закона Паскаля находится величина давления, выраженная в форме математического соотношения, представленного двойным интегралом.

Для самостоятельной работы можно предложить студентам аналогичную задачу, в которой вертикальный затвор имеет форму полукруга с радиусом R и расположен в жидкости так, как в данной задаче.

3. Применение неравенства Чебышева для оценки вероятности рассматриваемого события. Пусть вероятность производства нестандартной детали в некоторых технологических условиях равна 0,1. Почему нельзя применить неравенство Чебышева для оценки вероятности того, что число нестандартных среди

10000 деталей будет заключено в границах от 950 до 1030 включительно? Какой должна быть правая граница, чтобы применение неравенства Чебышева стало возможным? Решить задачу при соответствующем изменении правой границы.

Решение

Число нестандартных деталей – случайная величина ξ , распределенная по биномиальному закону. Тогда:

$$M(\xi) = np, \text{ т. е. } M(\xi) = 10000 \cdot 0,1 = 1000;$$

$$D(\xi) = npq, \text{ т. е. } D(\xi) = 10000 \cdot 0,1 \cdot 0,9 = 900.$$

Очевидно, что границы допустимых значений не симметричны относительно математического ожидания ($1030 - 1000 = 30$, $1000 - 950 = 50$). Поэтому применить неравенство Чебышева для оценки вероятности рассматриваемого события нельзя.

Применение неравенства Чебышева станет возможным, если правая граница будет равна 1050. Учитывая, что $950 \leq \xi \leq 1050$ эквивалентно неравенству $-50 \leq \xi - 1000 \leq 50$ или $|\xi - 1000| \leq 50$, применяем неравенство Чебышева при $\varepsilon = 50$ и $D(\xi) = 900$

$$P(|\xi - 1000| \leq 50) \geq 1 - \frac{900}{50^2} = 0,64.$$

Таким образом, вероятность того, что среди 10000 деталей нестандартных будет от 950 до 1050, не меньше 0,64.

Данную задачу можно использовать в курсе математики при изучении раздела «Теория вероятностей и математическая статистика».

Необходимость таких задач обусловлена тем, что наличие прикладных задач в курсе математики является неперенным условием практической реализации концепции ПНПМ. Следовательно, сборник таких задач – один из обязательных элементов системы средств обучения. Значимость этих задач обусловлена еще и тем, что их постановка и решение способствуют развитию у студентов навыков начального математического моделирования. Однако известно [5, 6], что таких задач нет в готовом виде, т. е. в виде, пригодном для использования в учебном процессе. Это означает, что подбор прикладных задач и их методическая обработка сопряжены с организацией соответствующей учебно-методической работы. Она базируется на построении организационно-методических связей преподавания математики с изучением специальных дисциплин и ее результатом явля-

ется построение сборника прикладных задач, например [7].

Следующим необходимым компонентом в системе средств обучения являются индивидуальные задания, каждое из которых представляет собой набор чаще всего формальных задач, соответствующих определенной математической теме. Содержание заданий определяется во многом тем, для каких специальностей они составлены. Даже формальные математические задачи, объединенные общей темой, могут быть разными. Все зависит от содержания и объема курса математики, который читается для данной специальности. Это обстоятельство указывает на то, что индивидуальные задания нельзя унифицировать лишь по математическим темам: для каждой специальности индивидуальное задание должно быть свое. Кроме того, структура индивидуального задания также может быть разной. Например, в начале каждого задания целесообразно привести перечень учебных пособий по курсу высшей математики с указанием пунктов (или страниц) и перечислить основные вопросы по теоретическому курсу, на знании которых будет базироваться выполнение данного задания. Затем следует перечислить основные умения и навыки, которыми должны владеть студенты, изучающие соответствующий раздел математического курса. После этого даются варианты индивидуальных задач. Лучше всего, когда вариантов не меньше числа студентов в группе.

Завершить задание можно перечнем дополнительных теоретических вопросов и некоторых усложненных задач. Эта часть индивидуального задания позволяет реализовать принцип пролонгации, входящий в концепцию ПНПМ [4, с. 42–45]. Его задача – обобщить и углубить знания студентов по математике, расширить их математический кругозор. Тем более это ценно, если учесть, что одним из перспективных путей повышения качества математической подготовки в вузе является приобщение с первых дней учебы к самостоятельной работе над книгой. Последнее весьма важно, так как студентам старших курсов и особенно молодым специалистам часто придется обращаться к соответствующей учебной и научной литературе.

Наличие указанной части индивидуального задания дает студентам возможность ознакомиться с новыми математическими идеями [4, с. 44]. Эти идеи особенно ценны там, где они получают непосредственное применение при изучении дисциплин, составляющих осно-

ву данной специальности. В условиях многоуровневой формы обучения реализация принципа пролонгации – неизбежное явление в процессе преподавания. Ориентация на новый и более высокий уровень обучения будет органически создавать для преподавателя математики предпосылки для расширения, углубления и обобщения определенных положений и для подведения учащихся к восприятию новой математической идеи.

Дополнительные теоретические вопросы и усложненные задачи должны отбираться с учетом их востребованности при изучении основных курсов данной специальности. Приведем пример одного из индивидуальных заданий [9].

ИНТЕГРАЛЫ.

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ 3

Рекомендуемая литература

1. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. – 2-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2002. – Ч. II. – 256 с.
2. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. – М.: Наука, 1985. – Т. 2: гл. XIV, с. 152–202; гл. XV, с. 208–239.
3. Сухая Т. А., Бубнов В. Ф. Задачи по высшей математике. – Мн.: Вышэйш. шк., 1993. – Ч. I, с. 299–407; ч. II, с. 138–221.

Теоретические вопросы

1. Дать определение первообразной и неопределенного интеграла. Сформулировать свойства первообразной и неопределенного интеграла.
2. Вывести формулу интегрирования по частям для неопределенного интеграла. Указать типы интегралов, вычисление которых целесообразно производить с помощью метода интегрирования по частям.
3. Изложить правило разложения рациональной дроби на сумму простейших дробей.
4. Изложить методы интегрирования простейших рациональных дробей.
5. Изложить методы интегрирования тригонометрических функций.
6. Изложить методы интегрирования функций, содержащих иррациональности.
7. Изложить методы интегрирования дифференциальных биномов.
8. Дать формулировку определенного интеграла, указать его геометрический смысл, перечислить его основные свойства.
9. Вывести формулу Ньютона–Лейбница.
10. Дать определение несобственных интегралов I и II рода и указать их геометрический смысл.
11. Сформулировать признаки сходимости несобственных интегралов.
12. Записать формулы вычисления площади области, длины дуги и объема тела вращения.
13. Дать определение двойного интеграла, указать его геометрический смысл, записать формулу для вычисления двойного интеграла с помощью двукратного.
14. Записать формулу для вычисления двойного интеграла в полярных координатах.
15. Дать определение тройного интеграла и указать метод его вычисления.

16. Определить цилиндрические координаты. Записать формулу перехода к цилиндрическим координатам в тройном интеграле.

17. Определить сферические координаты. Записать формулу перехода к сферическим координатам в тройном интеграле.

18. Записать формулы приложений двойного интеграла в геометрии и механике.

19. Записать формулы приложений тройного интеграла в геометрии и механике.

20. Дать определение криволинейного интеграла I рода и указать метод его вычисления.

21. Дать определение криволинейного интеграла II рода и указать метод его вычисления.

22. Дать физическое истолкование криволинейных интегралов.

23. Дать определение поверхностного интеграла I рода и указать метод его вычисления.

24. Дать определение поверхностного интеграла II рода и указать метод его вычисления.

25. Записать формулы геометрических приложений криволинейного и поверхностного интегралов I рода.

26. Записать формулы вычисления координат центра масс дуги кривой, поверхности.

Основные умения и навыки

- Овладеть различными методами интегрирования: замены переменной; по частям; интеграл от функций, содержащих квадратный трехчлен; рациональных дробей; тригонометрических выражений; иррациональных функций; интегралы от дифференциальных биномов; интегралы вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$.

- Умение вычислять несобственные интегралы, устанавливать их сходимость или расходимость.

- Умение применять определенные интегралы для вычисления объемов плоских фигур и длины дуги кривой.

- Умение вычислять кратные интегралы и использовать их приложения к решению различных задач.

- Умение вычислять криволинейные интегралы по длине дуги и координатам.

- Умение вычислять поверхностные интегралы по площади поверхности и координатам.

Расчетные задания

В этой части задания приводятся формальные задачи из курса высшей математики. Например:

Задача 1. Найти неопределенные интегралы.

Задача 2. Вычислить несобственные интегралы или исследовать их сходимость (или расходимость).

Задача 3. Вычислить с помощью определенного интеграла площадь плоской фигуры и длину дуги кривой.

Задача 4. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле $\iint_D f(x, y) dx dy$ для указанных областей D и

изменить порядок интегрирования.

Задача 5. Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$, если область V ограничена заданными поверхностями.

Задача 6. Вычислить с помощью двойного интеграла объем тела, ограниченного заданными поверхностями, и площадь области, ограниченной заданными линиями.

Задача 7. Вычислить $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$, если задана

$f(x, y, z)$ и поверхности, ограничивающие объем V .

Задача 8. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями.

Задача 9. Вычислить криволинейные интегралы I и II рода.

Задача 10. Вычислить с помощью поверхностного интеграла I рода площадь заданной поверхности и массу заданной поверхности.

Задача 11. Вычислить поверхностные интегралы II рода.

Задача 12. Задачи на приложение криволинейного и поверхностного интегралов I рода.

Дополнительные упражнения

1. Доказать, что если $f(x)$ – четная функция, то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx,$$

а если $f(x)$ – нечетная функция, то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

2. Показать, что формула $S = \int_a^b f(x) dx$, выражающая площадь области D , ограниченной линиями $y = 0$; $x = a$; $x = b$ и $y = f(x)$, где $f(x) \geq 0$, является следствием формулы $S = \iint_D dx dy$.

3. Показать, что $\int_0^a dy \int_0^y f(x) dx = \int_0^a (a-x) f(x) dx$.

4. Вычислить двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$, если область D – прямоугольник $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, а функция $f(x, y) = F''_{xy}(x, y)$.

5. С помощью теоремы о среднем найти $\lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{\pi R^2} \iint_D f(x, y) dx dy$, где область D – круг с границей $x^2 + y^2 = R^2$; $f(x, y)$ – непрерывная функция в области D .

6. Каков геометрический смысл криволинейного интеграла $\oint_L x dy$, где L – замкнутый контур, составленный из

линий $x = 0$; $y = c$; $y = d$; $x = f(y)$ с положительным направлением обхода?

7. Получить условие независимости от пути интегрирования криволинейного интеграла II рода

$$\int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz,$$

где L – пространственная кривая.

8. Каков геометрический смысл $\iint_{\sigma} z dx dy$, если σ – внешняя сторона замкнутой цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси OZ , основанием $z = 0$ и верхней, ограничивающей цилиндр поверхностью $z = f(y)$?

9. Какой из интегралов больше

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(x, y, z) dz \text{ или } \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} f(x, y, z) dz, \text{ если } f(x, y, z) > 0?$$

10. Пользуясь теоремой о среднем, оценить интеграл

$$\iiint_V \frac{dx dy dz}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}},$$

где V – объем, ограниченный поверхностью $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, а $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 > R^2$.

Очередным необходимым компонентом в системе средств обучения являются методические разработки отдельных разделов курса высшей математики. Необходимость таких средств обучения может возникнуть по трем причинам. Первая: более глубокое изучение некоторых вопросов курса математики и приобретение соответствующих навыков решения формальных задач с помощью новых методических приемов. Например, совместное изложение дифференциального и интегрального исчисления функции нескольких переменных с элементами теории поля. В этой ситуации многие абстрактные математические понятия приобретают осязаемый физико-механический смысл.

Вторая причина: востребованность в изучении новых математических объектов, не предусмотренных официальной программой курса математики. Это могут быть новые типы дифференциальных уравнений, специальные функции и их свойства (гамма-функция, функции Бесселя, эластичность функции и т. п.), специальные геометрические образы (огигающая, клотоида, обобщенная клотоида [8] и др.)

Третья причина: необходимость в реализации новых дидактических тенденций, связанных с перестройкой процесса обучения. Такая необходимость может быть вызвана изменением учебного плана, переходом на новую форму обучения, организацией межпредметных связей преподавания математики с изучением специальных дисциплин, активизацией самостоятельной работы студентов, изменением формы отчетности студентов и т. п. На инженерно-строительном факультете БНТУ для проведения практических занятий по математике необходимость в новых средствах обучения возникла в связи с перестройкой процесса обучения на базе концепции ПНПМ.

Таким образом, ориентация процесса обучения математике студентов инженерно-строительного профиля на повышение качества подготовки инженерных кадров потребовала не

только пересмотра существующих традиционных средств обучения математике, но и дополнения их новыми компонентами. Несмотря на то, что процесс перестройки математического образования в высшей школе далек от завершения, тем не менее удалось выделить следующие средства обучения:

набор прикладных задач (в идеальном случае это должен быть сборник таких задач или книга о математических методах в инженерно-строительных специальностях с соответствующими примерами и задачами, например учебное пособие [7]);

индивидуальные задания (способствуют систематизации знаний студентов и активизируют их самостоятельную работу, могут использоваться в качестве одного из средств контроля знаний студентов);

методические разработки (приобрели особую значимость в связи с тем, что некоторые разделы курса математики оказались востребованными при изучении специальных вопросов профилирующих дисциплин, как правило, создаются в результате методических разработок, устанавливающих межпредметные связи преподавания математики с изучением специальных дисциплин).

ЛИТЕРАТУРА

1. Блехман И. И., Мышкин А. Д., Пановко Я. Г. Механика и прикладная математика: Логика и особенности приложений математики. – М.: Наука, 1990. – 356 с.
2. Гнеденко Б. В. Математическое образование в вузах. – М.: Высш. шк., 1981. – 174 с.
3. Кудрявцев Л. Д. Современная математика и ее преподавание. – М.: Наука, 1985. – 170 с.
4. Скатецкий В. Г. Профессиональная направленность преподавания математики: Теор. и практ. аспекты. – Мн.: БГУ, 2000. – 159 с.
5. Барвенков С. А. Особенности обучения математике на факультетах гуманитарного типа // Состояние, проблемы и перспективы теории и практики обучения математике, физике и информатике: Материалы междунар. науч. конф. – Мн., 2002. – С. 50–52.
6. Скатецкий В. Г. О прикладных задачах в курсе математики высшей школы // Состояние, проблемы и перспективы теории и практики обучения математике, физике и информатике: Материалы междунар. науч. конф. – Мн., 2002. – С. 101–103.
7. Скатецкий В. Г., Свиридов Д. В., Яшкин В. И. Математическое моделирование физико-химических процессов: Учеб. пособие. – Мн.: БГУ, 2003. – 393 с.
8. Веременик В. В., Голубева И. А. Математические аспекты клотоидного проектирования: Учеб.-метод. пособие. – Мн.: Технопринт, 2002. – 44 с.
9. Типовые расчеты с методическими указаниями по курсу высшей математики для студентов I курса строительных специальностей: Интегралы / Сост. В. Н. Гудень и др. – Мн.: БПИ, 1987.