

## МЕТОД РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ, ОБУСЛОВЛЕННОГО ДИНАМИЧЕСКИМ МИКРОДВОЙНИКОМ

Магистрант *ВЛАШЕВИЧ В. В.*, канд. физ.-мат. наук *ОСТРИКОВ О. М.*

*Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого*

E-mail: omostrikov@mail.ru

На основании методов модели нетонкого некогерентного микродвойника с непрерывным распределением двойнических дислокаций на двойниковых границах разработан способ расчета напряженного состояния у динамического двойника в случае отсутствия дополнительной генерации источников двойнических дислокаций. В модели учтено, что в этом случае двойник имеет как когерентные, так и некогерентные участки границ. Разработанная модель в расчетах напряженно-деформированного состояния у динамического двойника позволила учесть форму некогерентных участков двойниковых границ. Установлено, что локализованные напряжения мигрируют вместе с некогерентными участками двойника. Нормальные напряжения  $\sigma_{xx}$  меняют знак по отношению к направлению развития двойника. Сдвиговые напряжения  $\sigma_{xy}$  знакопеременны по отношению к оси, перпендикулярной направлению развития двойника и проходящей через середину некогерентного участка двойника. Распределение напряжений  $\sigma_{yy}$  и  $\sigma_{yz}$  имеет схожую конфигурацию. Напряжения  $\sigma_{zx}$  во второй и четвертой четвертях плоскости  $XOY$  отрицательны, в первой и третьей – положительны. Распределение напряжений  $\sigma_{zz}$  по конфигурации практически не отличается от распределения напряжений  $\sigma_{yy}$ , но величина численных значений данных компонент тензора напряжений различна.

Результаты были получены без использования модели тонкого двойника, позволяющей рассматривать лишь упругую стадию процесса двойникового. Выполненные расчеты напряжений у динамического двойника важны для прогнозирования на стадии накопления повреждений зарождения, обусловленного двойникованием разрушения, и позволяют повысить точность прогнозирования ресурса технических систем на базе двойнических материалов, таких как сплавы на основе железа, меди, цинка, алюминия, титана.

**Ключевые слова:** напряженное состояние, модель нетонкого некогерентного микродвойника, двойнические дислокации.

Ил. 2. Библиогр.: 10 назв.

## METHOD FOR CALCULATION OF STRESSED STATE SUBSTANTIATED BY DYNAMIC MICROTWIN

*VLASHEVICH V. V., OSTRIKOV O. M.*

*Pavel Sukhoi State Technical University of Gomel*

Method for calculation of the stressed state in a dynamic twin has been developed on the basis of a non-thin non-coherent micro-twin model with continuous distribution of twinning dislocations at twin boundaries. In this case there is no additional generation with the help of twinning dislocation source. The model takes into account that the twin has coherent and non-coherent boundary sections. The developed model has made it possible to take into consideration a form of non-coherent sections of twinning boundaries in calculations of stressed and deformed state at dynamic twins. It has been established that localized stresses are migrating together with non-coherent sections of the twin. Normal stresses  $\sigma_{xx}$  change their sign in relation to direction of the twin development. Shear stresses  $\sigma_{xy}$  are alternating in signs in relation to an axis which is perpendicular to the direction of the twin development and which is passing through a mid-point of non-coherent twin section. Distribution of stresses  $\sigma_{yy}$  and  $\sigma_{yz}$  has similar configuration. Stresses  $\sigma_{zx}$  in the second and fourth quarters of  $XOY$  plane are negative and the stresses in the first and third quarters are positive. Distribution of stresses  $\sigma_{zz}$  practically does not differ from distribution of stresses  $\sigma_{yy}$  according to configuration but numerical values of stress tensor component data are different.

The results have been obtained without thin twin model that permits to consider only elastic stage of the twinning process. The executed stress calculations at dynamic twin are important for forecasting at the accumulation stage of damage origination which is caused by twinning destruction and permit to improve forecasting accuracy of technical system resources on the basis of twinning materials such as alloys based on iron, copper, zinc, aluminium, titanium.

**Keywords:** stressed state, model of non-thin non-coherent micro-twin, twinning dislocation.

Fig. 2. Ref.: 10 titles.

**Введение.** Как правило, при динамических испытаниях деталей машин дислокации скольжения в них движутся квазистатически и обусловленные ими динамические напряжения хорошо описываются решениями статистических задач. При высокоскоростном деформировании, когда благоприятно двойникование, динамические эффекты нельзя не учитывать. Это обусловлено тем, что двойникование является высокоскоростным процессом, интерес к которому возник в связи с проблемами образования, вызванными двойникованием трещин [1].

В настоящее время в дислокационной теории двойникования существует проблема в разработке такой модели двойника, которая при непрерывном распределении двойникоующих дислокаций вдоль двойниковых границ с заданной плотностью распределения не ограничивалась бы рамками приближения статического двойника [2]. Цель данной работы – создание макроскопической микромасштабной модели динамического двойника и расчет обусловленного им напряженно-деформированного состояния.

**Постановка задачи.** Рассмотрим схематическое изображение (рис. 1) для расчета полей напряжений, создаваемых микродвойником с непрерывным распределением двойникоующих дислокаций на границах. Двойникоующие дислокации являются частичными дислокациями Шокли [3], поэтому их вектор Бюргерса раскладывается на две составляющие: краевую ( $\mathbf{b}_{кр}$ ) и винтовую ( $\mathbf{b}_в$ ). Направление этих составляющих показано на рис. 1. В плоскости  $XOY$  форму некогерентных участков границ динамического двойника (участки  $BC$  и  $B_1C$ ) опишем функциями  $f_1(\xi)$  и  $f_2(\xi)$ . Пусть двойникоующие дислокации параллельны друг другу и оси  $OZ$ , перпендикулярной плоскости. Плотность двойникоующих дислокаций на некогерентных участках границ динамического двойника равна  $\rho_1$  и  $\rho_2$ . Примем время зарождения двойника  $t_0 = 0$ . Рассмотрим движение микро-

двойника вдоль оси  $OX$  при  $t > 0$ . Наличие у рассматриваемого динамического двойника в момент времени  $t \neq 0$  когерентных участков  $AB$  и  $A_1B_1$  указывает на отсутствие генерации источником новых двойникоующих дислокаций. Пренебрежем напряжениями, которые создают когерентные участки границ двойника. Это правомерно, так как данные напряжения малы из-за отсутствия на когерентных границах двойникоующих дислокаций, вносящих основной вклад в напряженно-деформированное состояние. Очевидно, что длина когерентных участков двойниковых границ в данном случае будет определяться по формуле  $s = v_t t$  (рис. 1), где  $v_t$  – скорость движения двойникоующих дислокаций вдоль оси  $OX$ .

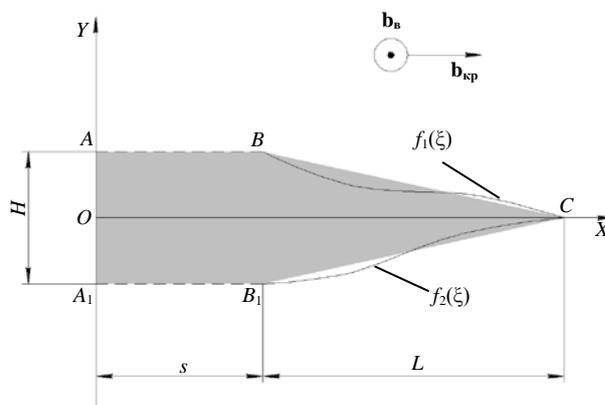


Рис. 1. Схематическое изображение динамического двойника и направления компонент вектора Бюргерса двойникоующих дислокаций

Используя приближение принципа суперпозиции и известные соотношения для расчета полей напряжений движущейся единичной дислокации, на основании разработанной в [2, 4] макроскопической модели двойника получим формулы для расчета компонент тензора напряжений у динамического двойника в случае отсутствия генерации источником дополнительных двойникоующих дислокаций:

$$\sigma_{xx}(x, y, \xi) = -\frac{b_{кр} c_t^2}{\pi v^2} \left\{ \int_0^L \rho(\xi) \left( \frac{\gamma_t (\lambda + 2\mu - \gamma_t^2 \lambda) (y - f_1(\xi))}{(x - \xi - v_t t)^2 + \gamma_t^2 (y - f_1(\xi))^2} - \frac{\mu \gamma_t (1 + \gamma_t^2) (y - f_1(\xi))}{(x - \xi - v_t t)^2 + \gamma_t^2 (y - f_1(\xi))^2} \right) \times \right. \\ \left. \times \sqrt{1 + \left( \frac{d}{d\xi} f_1(\xi) \right)^2} d\xi + \int_0^L \rho(\xi) \left( \frac{\gamma_t (\lambda + 2\mu - \gamma_t^2 \lambda) (y - f_2(\xi))}{(x - \xi - v_t t)^2 + \gamma_t^2 (y - f_2(\xi))^2} - \frac{\mu \gamma_t (1 + \gamma_t^2) (y - f_2(\xi))}{(x - \xi - v_t t)^2 + \gamma_t^2 (y - f_2(\xi))^2} \right) \times \right.$$

$$\times \sqrt{1 + \left( \frac{d}{d\xi} f_2(\xi) \right)^2} d\xi \}; \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}(x, y, \xi) = & \frac{\mu b_{\text{кр}} c_t^2}{2\pi v^2} \left\{ \int_0^L \rho(\xi) \left( \frac{(y - \gamma_t^2)^2 (x - \xi - v_\tau t)}{\gamma_t \left( (x - \xi - v_\tau t)^2 + \gamma_t^2 (y - f_1(\xi))^2 \right)^2} + \frac{-4\gamma_t (x - \xi - v_\tau t)}{(x - \xi - v_\tau t)^2 + \gamma_t^2 (y - f_1(\xi))^2} \right) \times \right. \\ & \times \sqrt{1 + \left( \frac{d}{d\xi} f_1(\xi) \right)^2} d\xi + \int_0^L \rho(\xi) \left( \frac{(1 + \gamma_t^2)^2 (x - \xi - v_\tau t)}{\gamma_t (x - \xi - v_\tau t)^2 + \gamma_t^2 (y - f_2(\xi))^2} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{-4\gamma_t (x - \xi - v_\tau t)}{(x - \xi - v_\tau t)^2 + \gamma_t^2 (y - f_2(\xi))^2} \right) \sqrt{1 + \left( \frac{d}{d\xi} f_2(\xi) \right)^2} d\xi \right\}; \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(x, y, \xi) = & -\frac{b_{\text{кр}} c_t^2}{\pi v^2} \left\{ \int_0^L \rho(\xi) \left( \frac{\gamma_t (\lambda - \gamma_t^2 (\lambda + 2\mu)) (y - f_1(\xi))}{(x - \xi - v_\tau t)^2 + \gamma_t^2 (y - f_1(\xi))^2} - \frac{\mu \gamma_t (1 + \gamma_t^2) (y - f_1(\xi))}{(x - \xi - v_\tau t)^2 + \gamma_t^2 (y - f_1(\xi))^2} \right) \times \right. \\ & \times \sqrt{1 + \left( \frac{d}{d\xi} f_1(\xi) \right)^2} d\xi + \int_0^L \rho(\xi) \left( \frac{\gamma_t (\lambda - \gamma_t^2 (\lambda + 2\mu)) (y - f_2(\xi))}{(x - \xi - v_\tau t)^2 + \gamma_t^2 (y - f_2(\xi))^2} - \right. \\ & \left. \left. - \frac{\mu \gamma_t (1 + \gamma_t^2) (y - f_2(\xi))}{(x - \xi - v_\tau t)^2 + \gamma_t^2 (y - f_2(\xi))^2} \right) \sqrt{1 + \left( \frac{d}{d\xi} f_2(\xi) \right)^2} d\xi \right\}; \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zx}(x, y, \xi) = & -\frac{\mu b_{\text{в}}}{2\pi} \left\{ \int_0^L \rho(\xi) \left( \frac{\gamma_t (y - f_1(\xi))}{(x - \xi - v_\tau t)^2 + \gamma_t^2 (y - f_1(\xi))^2} \right) \sqrt{1 + \left( \frac{d}{d\xi} f_1(\xi) \right)^2} d\xi + \right. \\ & \left. + \int_0^L \rho(\xi) \left( \frac{\gamma_t (y - f_2(\xi))}{(x - \xi - v_\tau t)^2 + \gamma_t^2 (y - f_2(\xi))^2} \right) \sqrt{1 + \left( \frac{d}{d\xi} f_2(\xi) \right)^2} d\xi \right\}; \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zy}(x, y, \xi) = & -\frac{\mu b_{\text{в}}}{2\pi} \left\{ \int_0^L \rho(\xi) \left( \frac{\gamma_t (x - \xi - v_\tau t)}{(x - \xi - v_\tau t)^2 + \gamma_t^2 (y - f_1(\xi))^2} \right) \sqrt{1 + \left( \frac{d}{d\xi} f_1(\xi) \right)^2} d\xi + \right. \\ & \left. + \int_0^L \rho(\xi) \left( \frac{\gamma_t (x - \xi - v_\tau t)}{(x - \xi - v_\tau t)^2 + \gamma_t^2 (y - f_2(\xi))^2} \right) \sqrt{1 + \left( \frac{d}{d\xi} f_2(\xi) \right)^2} d\xi \right\}; \quad (5) \end{aligned}$$

$$\sigma_{zz}(x, y, \xi) = v(\sigma_{xx}(x, y, \xi) + \sigma_{yy}(x, y, \xi)), \quad (6)$$

где  $\mu$  – модуль сдвига;  $v$  – коэффициент Пуассона;  $b_{\text{кр}}$ ,  $b_{\text{в}}$  – модули краевой и винтовой составляющих вектора Бюргера частичной двойникующей дислокации;  $v_\tau$  – скорость движения дислокаций;  $t$  – время;  $c_t$ ,  $c_l$  – скорости продольной и поперечной звуковых волн;  $\gamma_t$ ,  $\gamma_l$  – параметры, связывающие скорость двойникующих дислокаций с  $c_t$  и  $c_l$ .

В случае прямолинейных некогерентных участков двойниковых границ их форма может быть описана формулами [2, 4]:

$$f_1(\xi) = \frac{H}{2} \left( 1 - \frac{\xi}{L} \right); \quad f_2(\xi) = -\frac{H}{2} \left( 1 - \frac{\xi}{L} \right), \quad (7)$$

где  $L$  – длина двойника;  $H$  – его ширина у устья (рис. 1).

Следует отметить, что в рассматриваемой модели пренебрегаем величиной ступеньки, образуемой двойником на поверхности кристалла в результате поворота кристаллической решетки. В теории двойникового данное приближение широко используется [5, 6] и не означает отрицание такого поворота кристаллической решетки, а является приближением модели ввиду малой величины ступеньки. Тем более такое приближение оправдано в рамках механики деформируемого твердого тела, где используется гипотеза о сплошности среды и кристаллические тела рассматриваются как анизотропные сплошные среды [7]. Учет данной ступеньки в рамках рассматриваемой модели элементарен. Для этого в одном из интегралов соотношений (1)–(6) достаточно вести интегрирование не от нуля, а от величины  $\delta$ , равной высоте ступеньки. Как показали расчеты, учет ступеньки существенного влияния на результаты не оказывает. Поэтому без ущерба общности модели пренебрежение величиной ступеньки оправдано.

Возможность зарождения двойника вдали от поверхности общеизвестна и рассмотрена в [5, 6]. Часто вдали от поверхности кристаллического твердого тела двойники зарождаются у границ зерен или других двойников, а также у неоднородностей и включений, у которых при внешнем деформировании концентрируются внутренние напряжения.

Скорости продольной и поперечной звуковых волн  $c_t$  и  $c_l$  определяются по формулам [3]:

$$c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}; \quad c_l = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}}, \quad (8)$$

где  $\rho_0$  – плотность среды, в которой движется дислокация;  $\lambda$  – коэффициент Ламе, рассчитываемый по формуле [3]

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad (9)$$

где  $E$  – модуль Юнга.

Скорости продольной и поперечной звуковых волн со скоростью двойникующих дислокаций связаны соотношениями [3]:

$$\gamma_t = \sqrt{1 - \frac{v_{\tau}^2}{c_t^2}}; \quad \gamma_l = \sqrt{1 - \frac{v_{\tau}^2}{c_l^2}}. \quad (10)$$

**Результаты расчетов и их обсуждение.** Результаты расчетов проиллюстрированы на рис. 2, где четко прослеживаются двойниковые границы, на которых концентрируются напряжения. Это указывает на правильность используемой модели, отражающей экспериментальные данные [1, 2, 8]. В рамках представленной модели возможно детальное рассмотрение напряженного состояния внутри двойника (рис. 2), что не позволяла сделать модель тонкого двойника [6, 9, 10].

Расчет напряжений вели для висмута. Принимали:  $\rho_0 = 9,8$  кгс/м<sup>3</sup>;  $\mu = 12,4$  ГПа;  $\nu = 0,33$ ;  $E = 32 \cdot 10^9$  Па. Длину некогерентного участка принимали равной  $L = 100$  мкм, ширину двойника у устья –  $H = 11$  мкм. Рассчитывали распределение компонент тензора напряжений у динамического микродвойника в момент времени  $t = 10^{-3}$  с.

Участки  $AB$  и  $A_1B_1$  двойниковых границ когерентны, и движение двойникующих дислокаций происходит вдоль оси  $OX$  (рис. 1). Участки  $BC$  и  $B_1C$  двойниковых границ образуют клин и являются некогерентными. Фронт напряжений перемещается вместе с двойникующими дислокациями на некогерентных участках двойниковых границ.

Нормальные напряжения  $\sigma_{xx}$  меняют знак по отношению к направлению развития двойника, совпадающему с направлением оси  $OX$ . В положительном направлении оси  $OY$  данные напряжения отрицательны, а в отрицательном направлении оси  $OY$  – положительны (рис. 2а). Присутствие когерентных участков  $AB$  и  $A_1B_1$ , в отличие от некогерентных участков  $BC$  и  $B_1C$ , не выражено, что указывает на отсутствие на когерентных границах напряжений, обусловленных двойникующими дислокациями. Таким образом, у одной из границ динамического двойника нормальные напряжения  $\sigma_{xx}$  сжимающие, а у другой – растягивающие. Максимальные значения  $\sigma_{xx}$  сконцентрированы на некогерентных участках границ двойника.

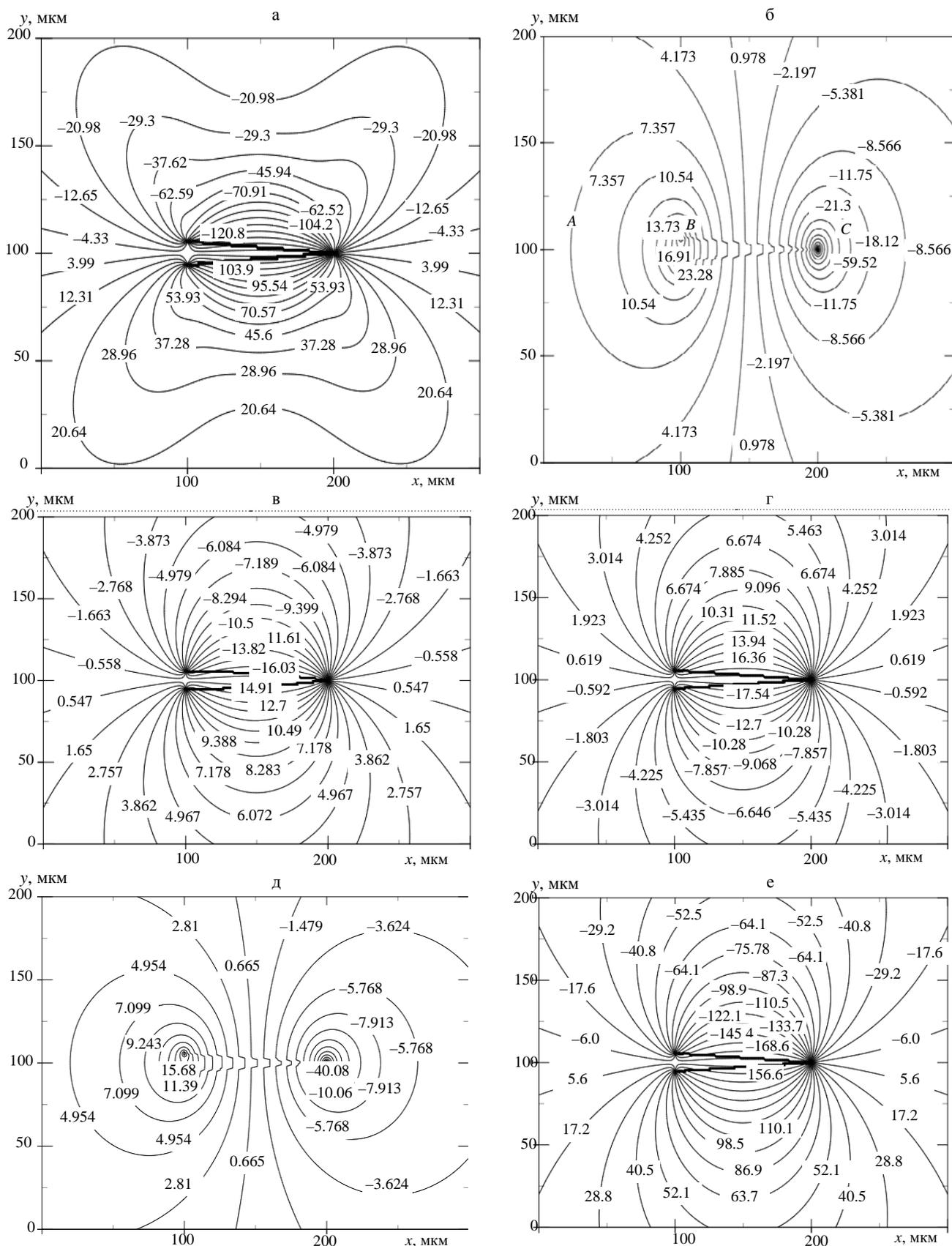


Рис. 2. Распределение напряжений (МПа) у динамического двойника в момент времени  $t = 10^{-3}$  с:  
 а –  $\sigma_{xx}(x, y)$ ; б –  $\sigma_{xy}(x, y)$ ; в –  $\sigma_{yy}(x, y)$ ; г –  $\sigma_{yz}(x, y)$ ; д –  $\sigma_{zx}(x, y)$ ; е –  $\sigma_{zz}(x, y)$

Сдвиговые напряжения  $\sigma_{xy}$  знакопеременны по отношению к оси, параллельной  $OY$  и проходящей через середину некогерентного участка двойника (точку  $s + L/2$  на оси  $OX$ ). У вершины двойника данные напряжения отрицательны, а у устья – положительны (рис. 2б). В средней части некогерентного участка двойника напряжения  $\sigma_{xy}$  минимальны.

Распределение напряжений  $\sigma_{yy}$  и  $\sigma_{yz}$  имеет схожую конфигурацию (рис. 2в, г), отличаются результирующей величиной данных напряжений. Напряжения  $\sigma_{yy}$  в первой и второй четвертях плоскости  $XOY$  отрицательны и положительны в третьей и четвертой четвертях. Напряжения  $\sigma_{yz}$  (рис. 2г), наоборот, в первой и второй четвертях плоскости  $XOY$  положительны, а в третьей и четвертой – отрицательны. Максимальные значения напряжений  $\sigma_{yy}$  и  $\sigma_{yz}$  наблюдаются в средней части некогерентного участка двойника. В данном случае знак напряжений у границ двойника различен.

Напряжения  $\sigma_{zx}$ , представленные на рис. 2д, во второй и четвертой четвертях плоскости  $XOY$  отрицательны, в первой и третьей – положительны. Минимальные напряжения  $\sigma_{zx}$  имеют место в средней части некогерентной области двойника. Распределение напряжений  $\sigma_{zz}$  (рис. 2е) по конфигурации практически не отличается от напряжений  $\sigma_{yy}$ , но величина численных значений данных компонент тензора напряжений различна.

## ВЫВОД

На основании дислокационной модели в приближении непрерывного распределения двойникующих дислокаций на двойниковых границах проведены расчеты напряжений у динамического микродвойника. Показано, что присутствие когерентного участка у динамического двойника клиновидной формы обусловлено отсутствием генерации дополнительных двойникующих дислокаций их источником. Максимум напряжений сконцентрирован на некогерентных участках двойниковых границ.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Финкель, В. М. Разрушение кристаллов при механическом двойниковании / В. М. Финкель, В. А. Федоров, А. П. Королев. – Ростов-н/Д., 1990. – 172 с.

2. Остриков, О. М. Механика двойникования твердых тел / О. М. Остриков. – Гомель: Гомельский гос. техн. ун-т имени П. О. Сухого, 2008. – 301 с.

3. Хирт, Дж. Теория дислокаций / Дж. Хирт, И. Лотте. – М.: Атомиздат, 1972. – 600 с.

4. Остриков, О. М. Дислокационная макроскопическая модель клиновидного двойника / О. М. Остриков // Вестник ГГТУ имени П. О. Сухого. – 2006. – № 2. – С. 10–18.

5. Косевич, А. М. Дислокации в теории упругости / А. М. Косевич. – К.: Наук. думка, 1978. – 220 с.

6. Косевич, А. М. Дислокационная теория упругого двойникования кристаллов / А. М. Косевич, В. С. Бойко // Успехи физических наук. – 1971. – Т. 104, № 2. – С. 101–255.

7. Работнов, Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю. Н. Работнов. – М.: Наука, 1988. – 712 с.

8. Остриков, О. М. Закономерности слияния двойников в монокристаллах висмута / О. М. Остриков // Физика металлов и металловедение. – 2012. – Т. 113, № 8. – С. 846–852.

9. Остриков, О. М. Дислокационная модель некогерентного нетонкого двойника / О. М. Остриков // Журнал технической физики. – 2012. – Т. 57, № 11. – С. 1503–1507.

10. Остриков, О. М. Дислокационная модель нетонкой границы двойниковой прослойки / О. М. Остриков // Вестник Полоцкого государственного университета. Сер. С. Фундаментальные науки. – 2013. – № 4. – С. 83–95.

## REFERENCES

1. Finkel, V. M., Fedorov, V. A., & Korolev, A. P. (1990) *Destruction of Crystals at Mechanical Twinning*. Rostov-on-Don: Publisher University of Rostov. 172 p. (in Russian).

2. Ostrikov, O. M. (2008) *Mechanics of Solid Body Twinning*. Gomel: Pavel Sukhoi State Technical University of Gomel. 301 p. (in Russian).

3. Hirth, G., & Lothe, I. (1972) *Dislocation Theory*. Moscow, Atomizdat. 600 p. (in Russian).

4. Ostrikov, O. M. (2006) Dislocation Macroscopic Model of Wedge-Type Twin. *Vestnik Gomel'skogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta im. P. O. Sukhogo* [Bulletin of the Sukhoi State Technical University of Gomel, 2, 10–18 (in Russian).

5. Kosevich, A. M. (1978) *Dislocation in Elasticity Theory*. Kiev, Naukova Dumka. 220 p. (in Russian).

6. Kosevich, A. M., & Boiko, V. S. (1971) Dislocation Theory of Elastic Crystal Twinning. *Uspekhi Fizicheskikh Nauk* [Successes of Physical Sciences], 104 (2), 101–255 (in Russian).

7. Rabotnov, Yu. N. (1988) *Mechanics of Deformed Solid Body*. Moscow, Nauka. 712 p. (in Russian).

8. Ostrikov, O. M. (2012) Twinning Fusion Regularities in Bismuth Mono-Crystals. *Fizika Metallov i Metallovedenie* [Physics of Metals and Metal Science], 113 (8), 846–852 (in Russian).

9. Ostrikov, O. M. (2012) Dislocation Model of Non-coherent Non-Thin Twin. *Technical Physics*, 57 (11), 1503–1507. doi: 10.1134/S1063784212110205.

10. Ostrikov, O. M. (2013) Dislocation Model of Non-Thin Boundary of Twinning Layer. *Vestnik Polotskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya C. Fundamental'nye Nauki* [Bulletin of Polotsk State University. Series C. Fundamental Sciences], 4, 83–95 (in Russian).

Поступила 07.04.2014