DOI: 10.21122/2227-1031-2017-16-6-532-536

УДК 519.8; 332.1

К проблеме оптимизации региональной складской и автотранспортной инфраструктуры[1]

Докт. техн. наук, проф. И. Ю. Мирецкий[1)], канд. техн. наук, доц. П. В. Попов[1)], докт. экон. наук, проф. Р. Б. Ивуть[2)]

[1)]Волжский гуманитарный институт, филиал Волгоградского государственного университета (Волжский, Российская Федерация),
[2)]Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

Реферат. Предлагается подход к решению проблемы оптимизации складской и транспортной инфраструктуры региона. Проблема состоит в определении оптимальных мощности и месторасположения опорной сети складов на территории региона, мощности, состава и месторасположения автотранспортных парков. С целью оптимизации рассматриваются математические модели региональной складской сети и сети автотранспортных парков. Эти модели представлены в виде задач математического программирования с сепарабельными функциями. Процесс поиска оптимального решения задач осложнен их особенностями: высокой размерностью, нелинейностью функций и тем, что на часть переменных наложено ограничение целочисленности, а некоторые переменные могут принимать значения только из дискретного множества. Перечисленные особенности задач обусловливают отказ от поиска точного решения. В статье предлагается приближенный подход к решению задач. Этот подход нацелен на использование эффективных вычислительных схем решения многомерных оптимизационных задач, имеющих высокую размерность. Для приближенного решения задачи выполняется переход к ее непрерывной релаксации, которая предполагает отказ от требований целочисленности (дискретности) переменных. В качестве приближенного решения исходной задачи принимается приближенно оптимальное решение ее непрерывной релаксации. Предлагаемый метод решения подразумевает линеаризацию полученной непрерывной релаксации и использование схем сепарабельного программирования и ветвей, и границ. В статье оговорены особенности использования симплекс-метода при решении линеаризованной непрерывной релаксации исходной задачи, указаны специфические моменты реализации метода ветвей и границ. Показана конечность алгоритма решения задачи, даны рекомендации по ускорению процесса поиска решения.

Ключевые слова: региональная складская сеть, непрерывная релаксация, сепарабельное программирование, задача оптимизации

Для цитирования: Мирецкий, И. Ю. К проблеме оптимизации региональной складской и автотранспортной инфраструктуры / И. Ю. Мирецкий, П. В. Попов, Р. Б. Ивуть // *Наука и техника*. 2017. Т. 16, № 6. С. 532–536. DOI: 10.21122/2227-1031-2017-16-6-532-536

On Problem of Regional Warehouse and Transport Infrastructure Optimization

I. Yu. Miretskiy[1)], P. V. Popov[1)], R. B. Ivut[2)]

[1)]Volzhsky Institute of Humanities Branch of Volgograd State University (Volzhsky, Russian Federation),
[2)]Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. The paper proposes an approach to solution of the problem pertaining to warehouse and transport infrastructure optimization in a region. The task is to determine optimal capacity and location of the support network of warehouses on the regional territory and capacity, composition and location of motor fleets. Mathematical models of the regional warehouse network and the network of motor fleets have been used with the purpose to carry out optimization process. These models are presented as mathematical programming problems with separable functions. Searching process of optimal solution for problems

Адрес для переписки
Попов Павел Владимирович
Волжский гуманитарный институт,
филиал Волгоградского государственного университета
ул. 40 лет Победы, 11,
404133, г. Волжский, Волгоградская обл.,
Российская Федерация
Тел.: +7 917 649-78-22
donpascha@yandex.ru

Address for correspondence
Popov Pavel V.
Volzhsky Institute of Humanitics
Branch of Volgograd State University
11 of 40 year Victory str.,
404133, Volzhsky, Volgogradskaya obl.,
Russian Federation
Tel.: +7 917 649-78-22
donpascha@yandex.ru

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда (проект № 16-12-34015).

is complicated due to high dimensionality, non-linearity of functions, and the fact that a part of variables are constrained to integer, and some variables can take values only from a discrete set. The mentioned above task peculiarities motivate rejection from search for an exact solution. The paper proposes an approximate approach to solving problems. This approach is directed on usage of effective computational schemes for solving multidimensional optimization problems which have high dimensionality. It is proposed to carry out transition to continuous relaxation of the original problem in order to obtain its approximate solution. The continuous relaxation presupposes rejection from variable integrality (discreteness) conditions. As an approximate solution of the original problem an approximately optimal solution of continuous relaxation has been taken in the paper. The suggested solution method implies linearization of the obtained continuous relaxation and usage of separable programming schemes and branches and bounds. The paper describes usage of a simplex method for solving a linearized continuous relaxation of the original problem and specific moments for implementation of a method of branches and bounds. The paper shows finiteness of the algorithm for problem solution and recommends how to accelerate process for searching a solution.

Keywords: regional warehouse network, continuous relaxation, separable programming, optimization tasks

For citation: Miretskiy I. Yu., Popov P. V., Ivut R. B. (2017) On Problem of Regional Warehouse and Transport Infrastructure Optimization // *Science and Technique*. 16 (6), 532–536. DOI: 10.21122/2227-1031-2017-16-6-532-536

Введение

В [1–5] предложен подход к решению задачи определения мощности и месторасположения опорной сети складов на территории регионов. Как реализация этого подхода авторами разработана математическая модель в виде задачи математического программирования. Задачу оптимизации региональной складской сети резонно рассматривать совместно с задачей оптимизации транспортной инфраструктуры. Моделированию и оптимизации транспортной инфраструктуры региона посвящена статья [6]; разработанная здесь математическая модель более сложна, чем модель [1], однако имеет сходную структуру. В построенных моделях – задачах математического программирования – все функции являются сепарабельными, большинство из них – линейные. Осложняют процесс поиска оптимального решения задач дополнительные условия:

1) некоторые функции являются нелинейными;

2) на некоторые переменные наложено требование целочисленности;

3) некоторые переменные могут принимать значения только из дискретного множества.

В настоящей работе предлагается математический аппарат для численного решения задач оптимизации складской и автотранспортной инфраструктур.

Постановка задачи

Упростив обозначения переменных и функций, поставим задачи [1, 6] в следующем общем виде:

минимизировать

$$f^0(x_1, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} f_j^0\left(x_j\right), \qquad (1)$$

при условиях

$$f^i(x_1, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} f_j^i\left(x_j\right) R_i b_i, \; i = \overline{1, m}, \qquad (2)$$

где R_i – либо «≤», либо «=»;

$$x_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \; j = \overline{1, n_1}, \qquad (3)$$

$$x_j \in \mathbf{W}_j = \left\{w_j^1, w_j^2, ..., w_j^{s_j}\right\}, \; j = \overline{n_1 + 1, n_2}, \qquad (4)$$

где $w_j^k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \; k = \overline{1, s_j}$;

$$x_j \geq 0, \; j = \overline{n_2 + 1, n}. \qquad (5)$$

Сепарабельные функции $f_j^i(x_j), \; i = \overline{0, m}$, $j = \overline{1, n}$ в общем случае являются нелинейными. Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что множество $\mathbf{W}_j$ упорядочено: $w_j^1 \leq w_j^2 \leq ... \leq w_j^{s_j}$ $(j = \overline{n_1 + 1, n_2})$. Отметим также, что ограничения (2) описанной задачи позволяют определить правые границы υ_j для переменных, так что эти значения υ_j можно считать известными:

$$x_j \leq u_j, \; j = \overline{1, n} \; \left(u_j = w_j^{s_j}, \; j = \overline{n_1 + 1, n_2}\right).$$

В дальнейшем для каждой переменной будет удобно указывать и ее нижнюю границу d_j:

$$d_j \leq x_j \leq u_j, \; j = \overline{1, n}. \qquad (6)$$

Изначально $d_j = 0,\ j = \overline{1, n_1},\ \overline{n_2 + 1, n}$ и $d_j = w_j^1$, $j = \overline{n_1 + 1, n_2}$.

Приближенное решение задачи

В силу высокой размерности рассматриваемой задачи, наличия нелинейных функций в ее постановке, а также ограничений (3), (4) на переменные (целочисленность, принадлежность дискретному множеству) от поиска оптимального решения резонно отказаться. Будем использовать приближенный подход к решению поставленной задачи (1)–(5). Этот подход нацелен на использование эффективных вычислительных схем решения многомерных и высокоразмерных оптимизационных задач.

Для приближенного решения задачи рассмотрим ее непрерывную релаксацию (НР): откажемся от требования целочисленности (дискретности) переменных и заменим условия (3)–(5) условием

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1, n}. \qquad (7)$$

Таким образом, НР исходной задачи (1)–(5) есть задача (1), (2), (7).

В качестве приближенного решения исходной задачи примем приближенно оптимальное решение НР. В случае получения неудовлетворительного по качеству приближения (по ограничениям, по переменным) НР разбивается на две подзадачи, каждая из которых решается отдельно и т. д. до тех пор, пока не будет получено приемлемое по качеству решение. Предлагаемый подход сочетает в себе идеи метода сепарабельного программирования [7, 8] и метода ветвей и границ [9, 10].

Принимая во внимание сепарабельность функций $f_j^i(x_j),\ i = \overline{0, m},\ j = \overline{1, n}$, для получения приближенно оптимального решения задачи НР воспользуемся методом сепарабельного программирования. Для начала выполним линеаризацию НР. Для линеаризации задачи каждая из нелинейных функций $f_j^i(x_j),\ i = \overline{0, m}$, $j = \overline{1, n}$ заменяется ее кусочно-линейной аппроксимацией. Таким образом, исходная задача НР заменяется приближенной задачей линейного программирования, которая решается симплекс-методом.

Для кусочно-линейной аппроксимации нелинейной функции $f_j^i(x_j),\ d_j \leq x_j \leq u_j$ разобьем отрезок $[d_j,\ u_j]$ точками $d_j = x_j^0,\ x_j^1, ..., x_j^k, ...,$ $x_j^{r_j} = u_j$. Кусочно-линейную аппроксимацию функции $f_j^i(x_j)$ на отрезке $[d_j, u_j]$ дает кусочно-линейная функция

$$q_j^i\left(x_j\right) = \sum_{k=0}^{r_j} \lambda_j^k f_j^i\left(x_j^k\right), \qquad (8)$$

где

$$x_j = \sum_{k=0}^{r} \lambda_j^k x_j^k; \qquad (9)$$

$$\lambda_j^k \geq 0,\ k = \overline{0, r_j}; \qquad (10)$$

$$\sum_{k=0}^{r_j} \lambda_j^k = 1. \qquad (11)$$

Замечание 1. В представлении (8)–(11) функции $f_j^i(x_j)$ для любого $x_j \in [d_j, u_j]$ не более двух соседних λ_j^k из множества $\Lambda_j = \left\{\lambda_j^0, \lambda_j^1, ..., \lambda_j^{r_j}\right\}$ специальных переменных отличны от нуля.

Используя приближенное представление (8)–(11) функции $f_j^i(x_j)$, дадим приближенное представление задачи НР (1), (2), (7) в следующем виде:

минимизировать

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{r_j} \lambda_j^k f_j^0\left(x_j^k\right) \qquad (12)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{r_j} \lambda_j^k f_j^i\left(x_j^k\right) R_i b_i, & i = \overline{1, m}; \\ \sum_{k=0}^{r_j} \lambda_j^k = 1, & j = \overline{1, n}; \\ \lambda_j^k \geq 0, & k = \overline{0, r_j}. \end{cases} \qquad (13)$$

Заметим, что при построении задачи (12), (13) для всех функций $f_j^i(x_j)$, $i=\overline{0,m}$ одной переменной x_j используется одно и то же разбиение отрезка [d_j, u_j] точками x_j^k, $k=\overline{0,r_j}$, которому соответствует свое собственное множество $\Lambda_j=\left\{\lambda_j^0, \lambda_j^1, ..., \lambda_j^{r_j}\right\}$ специальных переменных. Таким образом, каждой переменной x_j ставится в соответствие множество Λ_j, $j=\overline{1,n}$.

Задача (12), (13) – задача линейного программирования относительно переменных λ_j^k. Для решения задачи (12), (13) используем специальный вариант симплекс-метода [8], блокирующий одновременное вхождение в базис более двух соседних по индексу k специальных переменных λ_j^k при каждом j (Замечание 1). В итоге получим экстремальные значения переменных $\left(\lambda_j^k\right)^*$, а следовательно, и приближенное решение исходной задачи НР

$$x_j^*=\sum_{k=0}^{r_j}\left(\lambda_j^k\right)^* x_j^k,\ j=\overline{1,n}. \qquad (14)$$

Если найденные значения λ_j^* (14) удовлетворяют условиям (3)–(5), то $x_1^*, ..., x_n^*$ – искомое приближенно оптимальное решение исходной задачи (1)–(5). Если это не так, для получения решения используем метод ветвей и границ.

Будем использовать стандартную схему ветвей и границ для решения задач частично целочисленного линейного программирования [9, 10]. Поэтому опустим хорошо известные детали работы схемы и опишем лишь два специфических момента, присущих рассматриваемой задаче.

1. Опишем процедуру ветвления, используя принятые обозначения. Допустим, хотя бы одно из условий (3) или (4) не выполняется (условия (5) выполняются автоматически). Пусть для определенности не выполнено (4)

$$w_j^l<x_j^*<w_j^{l+1},\ j\in\left\{n_1+1, ..., n_2\right\}.$$

Тогда разобьем задачу НР (1), (2), (7) на две подзадачи НР1 и НР2, введя в НР дополнительные ограничения. Задача НР1 имеет вид (1), (2), (7), $d_j\le x_j\le w_j^l$; задача НР2 имеет вид (1), (2), (7), $w_j^{l+1}\le x_j\le u_j$.

Если не выполнено условие (3) и $d_j\le[x_j^*]<$ $<x_j^*<[x_j^*]+1\le u_j$, $j\in\left\{1, ..., n_1\right\}$, то задача НР1 имеет вид (1), (2), (7), $d_j\le x_j\le[x_j^*]$, а задача НР2 – вид (1), (2), (7), $[x_j^*]+1\le x_j\le u_j$.

2. В дополнение к стандартной схеме ветвей и границ здесь необходимо лишь каждый раз выполнять линеаризацию полученных при ветвлении НР-задач.

ВЫВОД

Представлен метод приближенного решения задачи оптимизации региональной складской и автотранспортной инфраструктуры. Метод предполагает построение непрерывной релаксации исходной задачи, линеаризацию полученной непрерывной релаксации и использование схем сепарабельного программирования и ветвей, и границ. Конечность метода (алгоритма решения) следует из конечности множеств, описываемых соотношениями (3) и (4) при дополнительных условиях (6). Для ускорения процесса поиска решения следует при выполнении линеаризации выбирать точки разбиения $x_j^0, x_j^1, ..., x_j^k, ..., x_j^{r_j}$ отрезка [d_j, u_j] так, чтобы выполнялось $\left\{w_j^1, w_j^2, ..., w_j^{s_j}\right\}\subseteq\left\{x_j^0, x_j^1, ..., x_j^k, ..., x_j^{r_j}\right\}$ (формула (4)) или $\{x_j \in \mathbb{Z}_{\ge 0} | d_j\le x_j\le u_j$, $j=$ $=\overline{1,n_1}\}\subseteq\{x_j^0, x_j^1, ..., x_j^k, ..., x_j^{r_j}\}$ (формулы (3), (6)). Наконец, если точность решения не является критичной (задача состоит в получении примерных оценок параметров реальной системы), то для ускорения процесса поиска решения резонно отсекать еще не исследованные вершины графа ветвлений с «плохими» оценками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Модель формирования складской инфраструктуры регионов / П. В. Попов [и др.] // Новости науки и технологий. 2016. Т. 37, № 2. С. 24–28.
2. Попов, П. В. Моделирование складской инфраструктуры регионов Российской Федерации / П. В. Попов, И. Ю. Мирецкий // Логистика. 2015. № 6. С. 24–27.
3. Попов, П. В. Формирование сети распределительных центров на территории Российской Федерации / П. В. Попов, И. Ю. Мирецкий, О. В. Шевченко // Логистика. 2016. № 4. С. 26–29.
4. Попов, П. В. О размещении транспортно-логистического центра на территории Волгоградской области / П. В. Попов, И. Ю. Мирецкий // Логистика. 2014. № 2. С. 46–49.
5. Попов, П. В. Построение модели формирования региональной складской сети / П. В. Попов, В. Е. Хартовский // Вестник МГСУ. 2016. № 8. С. 133–142.
6. Ивуть, Р. Б. Проектирование сети автотранспортных парков / Р. Б. Ивуть, П. В. Попов, И. Ю. Мирецкий // Наука и техника. 2016. Т. 15, № 5. С. 442–446. DOI: 10.21122/2227-1031-2016-15-5-442-446.
7. Miller, C. E. The Simplex Method for Local Separable Programming / C. E. Miller // Recent Advances in Mathematical Programming. Eds. R. Graves and P. Wolfe. McGraw-Hill. New York, 1963. P. 89–100.
8. Муртаф, Б. Современное линейное программирование / Б. Муртаф. М.: Мир, 1984. 224 с.
9. Land, A. Y. An Automatic Method for Solving Discrete Programming Problems / A. Y. Land, A. G. Doig // Econometrica. 1960. Vol. 28, No 3. P. 497–520.
10. Сигал, И. Х. Введение в прикладное дискретное программирование: модели и вычислительные алгоритмы / И. Х. Сигал, А. П. Иванова. М.: Физматлит, 2003. 240 с.

Поступила 17.05.2017
Подписана в печать 20.07.2017
Опубликована онлайн 28.11.2017

REFERENCES

1. Popov P., Miretskiy I., Ivut R., Lapkouskaya P. (2016) Model for Formation of Warehouse Infrastructure in Regions. *Novosti Nauki i Tekhnologiy = News of Science and Technologies*, 37 (2), 24–28 (in Russian).
2. Popov P. V., Miretskiy I. Yu. (2015) Simulation of Warehouse Infrastructure in Regions of Russian Federation. *Logistika = Logistics*, (6), 24–27 (in Russian).
3. Popov P. V., Miretskiy I. Yu., Shevchenko O. V. (2016) Creation of a Network of Distribution Centers on the Territory of the Russian Federation. *Logistika = Logistics*, (4), 26–29 (in Russian).
4. Popov P. V., Miretskiy I. Yu. (2014) On Location of Transport and Logistics Center on Territory of Volgograd Province. *Logistika = Logistics,* (2), 46–49 (in Russian).
5. Popov P. V., Khartovsky V. E. (2016) Modeling of Regional Warehouse Network Generation. *Vestnik MGSU = Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering*, (8), 133–142 (in Russian).
6. Ivut R. B., Popov P. V., Miretskiy I. Yu. (2016) Designing of Automobile Fleet Network. *Nauka i Tekhnika = Science & Technique*, 15 (5), 442–446 (in Russian). DOI: 10.21122/2227-1031-2016-15-5-442-446.
7. Miller C. E. (1963) The Simplex Method for Local Separable Programming. Graves R., Wolfe P. (ed.). *Recent Advances in Mathematical Programming*. New York, McGraw-Hill, 89–100.
8. Murtagh B. A. (1981) *Advanced Linear Programming*. New York, McGraw-Hill Book Co. 202.
9. Land A. Y., Doig A. G. (1960) An Automatic Method for Solving Discrete Programming Problems. *Econometrica*, 28 (3), 497–520. DOI: 10.2307/1910129.
10. Sigal I. H., Ivanova A. P. (2003) *Introduction to Applied Discrete Programming: Models and Computational Algorithms.* Moscow, Fizmatlit Publ. 240 (in Russian).

Received: 17.05.2017
Accepted: 20.07.2017
Published online: 28.11.2017