

ЛИТЕРАТУРА

1. Крагельский, И. В. Основы расчетов на трение и износ / И. В. Крагельский, М. Н. Добычин, В. С. Комбаров. – М.: Машиностроение, 1977.
 2. Мышкин, Н. К. Трибология. Принципы и прило-

жения / Н. К. Мышкин, М. И. Петроковец. – Гомель: ИММС НАН Беларуси, 2002. – 310 с.

3. Кузнецова, Т. А. Исследование износостойкости комбинированных вакуумных электродуговых покрытий на основе ZrHf / Т. А. Кузнецова, М. А. Андреев, Л. В. Маркова // Трение и износ. – 2005. – Т. 26, № 5. – С. 521–529.

Поступила 17.03.2006

УДК 681.511

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ УСТОЙЧИВЫХ СЕМЕЙСТВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

*Канд. техн. наук, доц. НЕСЕНЧУК А. А.,
 аспиранты ОСИПЯН А. И., ФЕДОРОВИЧ С. М.*

Белорусский национальный технический университет

Функционирование разнообразных технических устройств практически всегда сопряжено с отклонениями параметров от номинальных значений, установленных техническими требованиями. Подобные отклонения могут привести к значительной неопределенности и нарушению режима работы устройства, вплоть до его выхода из строя. Одним из основных направлений исследований систем с неопределенностью является параметрическое направление [1–5], рассматриваемое в настоящей статье. Наиболее значительные успехи были достигнуты в области анализа устойчивости систем. В рамках частотного подхода известны работы Я. З. Цыпкина и Б. Т. Поляка [1], труды В. Л. Харитоновой, Б. Р. Бармиша и Р. Темпо посвящены алгебраическому [2] и корневому [3] подходам. В данной работе развивается корневое направление [4, 5] к проблеме. Формулируются условия устойчивости для использования с целью параметрического синтеза робастных САУ.

Формирование корневого портрета. Рассмотрим интервальную динамическую систему (ИДС), описываемую семейством характеристических полиномов:

$$P(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n, \quad (1)$$

где $\underline{a}_j \leq a_j \leq \bar{a}_j$, $j = \overline{0, n}$, $a_0 \neq 0$, \underline{a}_j и \bar{a}_j – соответственно действительные значения мини-

мальной и максимальной границ замкнутого интервала изменения коэффициента a_j , которая представляет собой систему с параметрической неопределенностью.

Сделаем в (1) замену переменного $s = \sigma + i\omega$, запишем выражение относительно выбранного варьируемого коэффициента a_k

$$a_k = f(s) = u(\sigma, \omega) + iv(\sigma, \omega), \quad (2)$$

где $u(\sigma, \omega)$ и $v(\sigma, \omega)$ – гармонические функции двух независимых действительных переменных σ и ω .

Интервальное семейство рациональных функций отображения (2) позволяет формировать в плоскости s корневой портрет системы. Тогда уравнение корневого годографа Теодорчика – Эванса [4] определяется выражением

$$v(\sigma, \omega) = 0, \quad (3)$$

а уравнение параметра [4] – выражением

$$a_k = u(\sigma, \omega). \quad (4)$$

Динамика корневого портрета на границе устойчивости. Устойчивость семейства (1) зависит от расположения его корней относительно мнимой оси $i\omega$ плоскости корней s , являющейся границей асимптотической устойчи-

ности. Рассмотрим характер пересечения границы годографами корневого портрета.

Положим, что варьируемым коэффициентом, т. е. параметром корневого годографа, является свободный член (1) $a_k = a_n$. Определим в общем виде уравнение (3) годографа на границе устойчивости. При четных n , $n/2$ оно имеет вид

$$v(\omega) = -a_1\omega^{n-1} + a_3\omega^{n-3} - a_5\omega^{n-5} + \dots - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-1}\omega = 0. \quad (5)$$

Для вычисления значений параметра в точках пересечения границы устойчивости ветвями годографов определим также в общем виде уравнение (4) параметра годографа на этой границе. При четных n , $n/2$ оно имеет вид

$$u(\omega) = -a_0\omega^n + a_2\omega^{n-2} - a_4\omega^{n-4} + \dots - a_{n-4}\omega^4 + a_{n-2}\omega^2 = a_n. \quad (6)$$

Уравнения годографа и параметра для случаев, когда n четно, $n/2$ нечетно; n нечетно, $(n-1)/2$ четно и n нечетно, $(n-1)/2$ нечетно, выводятся таким же образом. Далее исследование будем вести применительно к случаю, когда n четно, $n/2$ четно (5), (6), поскольку для всех четырех случаев оно проводится аналогично.

Область пересечений. Ввиду аналитичности и непрерывности функций (5), (6) очевидно, что точки пересечения границы устойчивости ветвями годографов портрета образуют на этой оси некоторую многолистную область [5] D_ω , причем каждая ветвь образует непрерывную подобласть (лист) указанной области.

Определение 1. Область пересечений границы асимптотической устойчивости годографами корневого портрета ИДС назовем областью пересечений портрета.

Определим множество координат ω_{D_i} точек пересечения границы устойчивости, составляющих область пересечений, как множество $W_D = \{\omega_{D_i}\}$. Множество значений a_{D_i} параметра в точках ω_{D_i} обозначим как $A_D = \{a_{D_i}\}$.

Область экстремумов. Выразим экстремальные значения функции параметра (6) в области D_ω . Для этого выполним ее исследование на экстремум

$$u'(\omega) = +na_0\omega^{n-1} - (n-2)a_2\omega^{n-3} + (n-4)a_4\omega^{n-5} - \dots + 4a_{n-4}\omega^3 - 2a_{n-2}\omega = 0. \quad (7)$$

Корни уравнения (7) формируют множество $W_e = \{\omega_{e_i}\}$ точек экстремума функции параметра на границе устойчивости, т. е. ее область экстремумов D_e . Соответствующее множество значений функции параметра в точках множества W_e определяется как $A_e = \{a_{e_i}\}$ на основании (6).

Запишем выражения первой производной:

$$u'(\omega) = +n\underline{a}_0\omega^{n-1} - (n-2)\underline{a}_2\omega^{n-3} + (n-4)\underline{a}_4\omega^{n-5} - \dots + 4\underline{a}_{n-4}\omega^3 - 2\underline{a}_{n-2}\omega = 0; \quad (8)$$

$$u'(\omega) = +n\bar{a}_0\omega^{n-1} - (n-2)\bar{a}_2\omega^{n-3} + (n-4)\bar{a}_4\omega^{n-5} - \dots + 4\bar{a}_{n-4}\omega^3 - 2\bar{a}_{n-2}\omega = 0 \quad (9)$$

для определения соответственно максимальных и минимальных значений функции параметра на границе устойчивости в области пересечений портрета. Корни (8) и (9) формируют соответственно подмножества $W_{e_{\max}} \subset W_e$ и $W_{e_{\min}} \subset W_e$ координат точек максимума и минимума функции параметра в области D_ω . Подмножество значений параметра в точках подмножества $W_{e_{\max}}$ обозначим как $A_{e_{\max}}$, а в точках подмножества $W_{e_{\min}}$ – как $A_{e_{\min}}$.

Из формы уравнения параметра (6) следует, что границы $\bar{\omega}_e$ и $\underline{\omega}_e$ области экстремумов для системы при четных n , $n/2$:

$$\bullet \text{ верхняя} \quad \bar{\omega}_e = \sup W_{e_{\max}}; \quad (10)$$

$$\bullet \text{ нижняя} \quad \underline{\omega}_e = \inf W_{e_{\max}}. \quad (11)$$

Характер распределения функции параметра вдоль границы устойчивости. Интервальное семейство функций (7) порождает семейство кривых (рис. 1) распределения функции параметра траекторий $u(\omega)$ вдоль границы устойчивости. Для упрощения рисунка точки экстремума функции соединены прямыми линиями, хотя в действительности они представляют собой кривые. Участки возрастания функ-

ции параметра обозначены знаком плюс, убывания функции – знаком минус. Из уравнения параметра (6) следует, что кривая, порождаемая функцией (8), является мажорантой, а порождаемая функцией (9) – минорантой семейства.

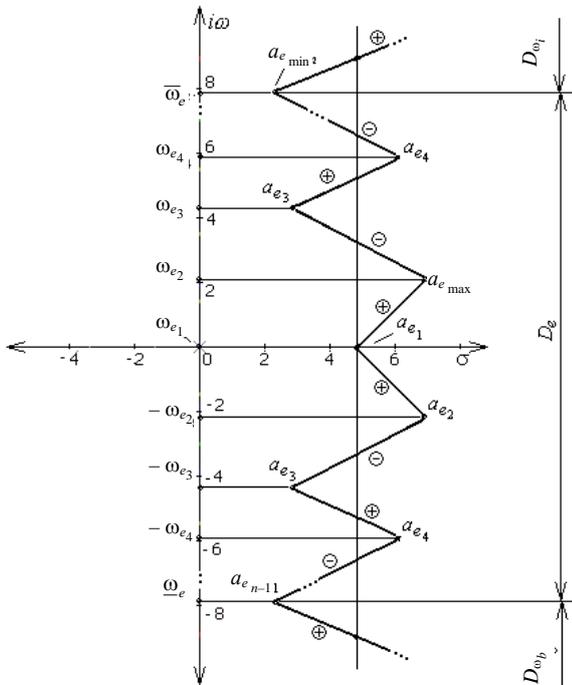


Рис. 1. Динамика функции параметра на границе устойчивости

Исходя из (5), (6), (8), (9), координаты точек экстремума и значения функции параметра в этих точках, а следовательно, и границы области экстремумов (10), (11) зависят только от коэффициентов при четных степенях характеристического уравнения (1). Если хотя бы один из коэффициентов изменяется на бесконечном интервале, то область пересечений D_ω бесконечна.

Область пересечений D_ω разделяется на три области:

- D_e – экстремумов, в пределах интервала $[\underline{\omega}_e, \bar{\omega}_e]$;
- $D_{\omega r}$ – пересечений верхнюю, в пределах интервала $[\bar{\omega}_e, \infty]$;
- $D_{\omega b}$ – пересечений нижнюю, в пределах интервала $[-\infty, \underline{\omega}_e]$.

Реальная область пересечений. При задании границ интервалов вариации параметра

область пересечений D_ω не бесконечна и является ограниченной. Максимальная $\bar{\omega}_D$ и минимальная $\underline{\omega}_D$ координаты, ограничивающие область пересечений, определяются из уравнения корневого годографа (5).

Границы реальной области D_ω пересечений заданного портрета могут различным образом располагаться по отношению к границам области экстремумов D_e . Например, реальная область пересечений может включать область экстремумов (рис. 2) или только ее некоторую часть, а также располагаться за ее пределами.

Координаты максимальных верхних и минимальных нижних границ участков в семействе кривых распределения функции параметра для реальной области пересечений корневого портрета определяются соответственно из уравнений

$$v(\omega) = -\underline{a}_1 \omega^{n-1} + \bar{a}_3 \omega^{n-3} - \underline{a}_5 \omega^{n-5} + \dots - \underline{a}_{n-3} \omega^3 + \bar{a}_{n-1} \omega = 0; \quad (12)$$

$$v(\omega) = -\bar{a}_1 \omega^{n-1} + \underline{a}_3 \omega^{n-3} - \bar{a}_5 \omega^{n-5} + \dots - \bar{a}_{n-3} \omega^3 + \underline{a}_{n-1} \omega = 0, \quad (13)$$

а максимальные и минимальные значения параметра на этих границах – по формулам

$$u(\omega) = -\underline{a}_0 \omega^n + \bar{a}_2 \omega^{n-2} - \underline{a}_4 \omega^{n-4} + \dots - \underline{a}_{n-4} \omega^4 + \bar{a}_{n-2} \omega^2 = a_{n \max}; \quad (14)$$

$$u(\omega) = -\bar{a}_0 \omega^n + \underline{a}_2 \omega^{n-2} - \bar{a}_4 \omega^{n-4} + \dots - \bar{a}_{n-4} \omega^4 + \underline{a}_{n-2} \omega^2 = a_{n \min}. \quad (15)$$

Из (12), (13) определяются максимальная $\bar{\omega}_D$ и минимальная $\underline{\omega}_D$ границы реальной области пересечений.

На рис. 2 представлено поле корневых траекторий системы шестого порядка. Область пересечений состоит из подобластей $D_{\omega 1}$, $D_{\omega 2}$ и $D_{\omega 3}$, формируемых при пересечении границы устойчивости двумя ветвями каждого годографа поля.

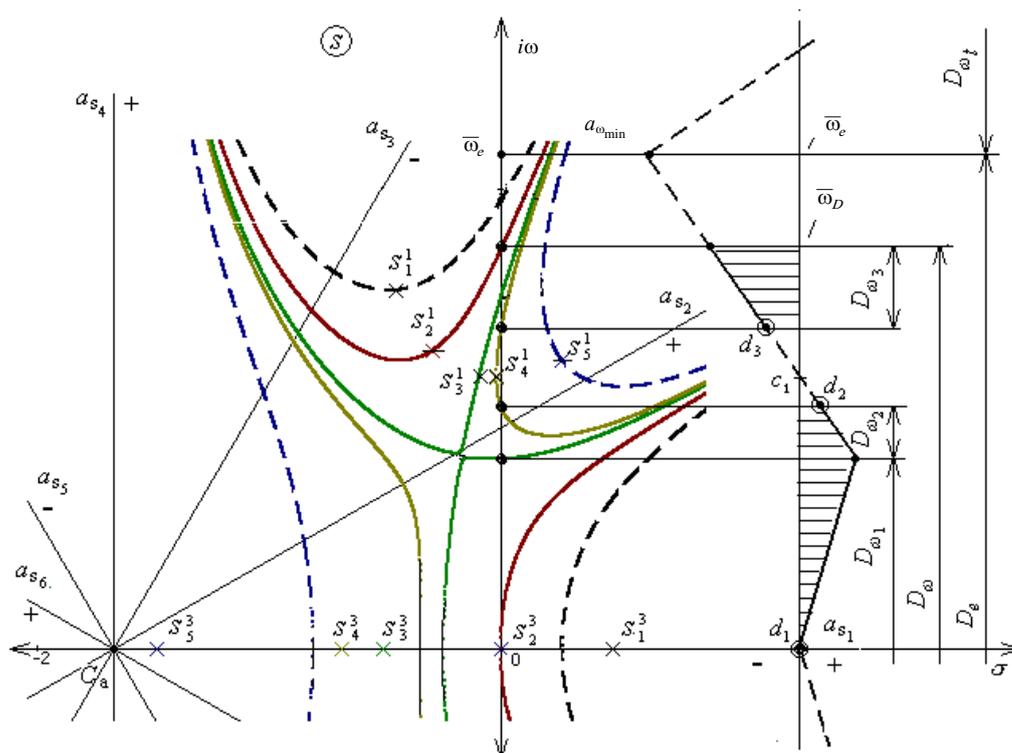


Рис. 2. Область пересечений границы устойчивости $i\omega$ ветвями годографов поля

Доминирующие ветви. Для каждой кривой распределения (рис. 1) имеет место чередование участков возрастания и убывания функции параметра. Причем может быть два варианта пересечения этих участков: слева направо и справа налево. В этой связи выделим четыре подобласти области пересечений:

- \bar{D}_g – на участках возрастания функции параметра ветвями слева направо;
- \bar{D}_g – на участках возрастания функции параметра ветвями справа налево;
- \bar{D}_f – на участках убывания функции параметра ветвями слева направо;
- \bar{D}_f – на участках убывания функции параметра ветвями справа налево.

Определение 2. Доминирующей ветвью областей \bar{D}_g и \bar{D}_f назовем ветвь, пересекающую границу устойчивости в точке с наименьшим значением параметра траекторий, а областей \bar{D}_g и \bar{D}_f – ветвь, пересекающую границу устойчивости в точке с наибольшим значением параметра траекторий в данной области.

Определение 3. Полином интервального семейства, корневому годографу которого принадлежит доминирующая ветвь, назовем доминирующим полиномом.

Синтез устойчивого семейства. Сформулируем следующее утверждение.

Утверждение 1. Если доминирующие ветви областей \bar{D}_g , \bar{D}_f , \bar{D}_g и \bar{D}_f пересечения границы устойчивости ветвями корневого портрета интервальной системы являются устойчивыми, то корневой портрет системы устойчив.

Доказательство. Если доминирующая ветвь одной из областей \bar{D}_g , \bar{D}_f , \bar{D}_g или \bar{D}_f устойчива, то, очевидно, что устойчивым будет и подсемейство ветвей, пересекающих границу устойчивости в этой области. Поскольку корневой портрет системы состоит из указанных четырех подсемейств ветвей, то устойчивость всех подсемейств влечет за собой устойчивость портрета системы в целом.

Очевидно, что доминирующие ветви областей \bar{D}_g , \bar{D}_f пересекают границу устойчивости на участках кривой распределения параметра в точках с минимальными для своих участков координатами ω , т. е. на нижних границах соответствующих участков (13), а доминирующие ветви областей \bar{D}_f , \bar{D}_g – в точках с максимальными для своих участков координатами ω , т. е. на верхних границах соответствующих участков (12). На этом основании, исходя из формул (12)–(15) сформируем для интервального

семейства полиномов (1) (при четных n , $n/2$) четыре доминирующих полинома:

$$d_1(s) = -\underline{a}_0 s - \underline{a}_1 s^{n-1} + \bar{a}_2 s^{n-2} + \bar{a}_3 s^{n-3} - \underline{a}_4 s^{n-4} - \dots - \underline{a}_{n-4} s^4 - \underline{a}_{n-3} s^3 + \bar{a}_{n-2} s^2 + \bar{a}_{n-1} s; \quad (16)$$

$$d_2(s) = -\bar{a}_0 s^n - \underline{a}_1 s^{n-1} + \underline{a}_2 s^{n-2} + \bar{a}_3 s^{n-3} - \bar{a}_4 s^{n-4} - \dots - \bar{a}_{n-4} s^4 - \underline{a}_{n-3} s^3 + \underline{a}_{n-2} s^2 + \bar{a}_{n-1} s; \quad (17)$$

$$d_3(s) = -\underline{a}_0 s^n - \bar{a}_1 s^{n-1} + \bar{a}_2 s^{n-2} + \underline{a}_3 s^{n-3} - \underline{a}_4 s^{n-4} - \dots - \underline{a}_{n-4} s^4 - \bar{a}_{n-3} s^3 + \bar{a}_{n-2} s^2 + \underline{a}_{n-1} s; \quad (18)$$

$$d_4(s) = -\bar{a}_0 s^n - \bar{a}_1 s^{n-1} + \underline{a}_2 s^{n-2} + \underline{a}_3 s^{n-3} - \bar{a}_4 s^{n-4} - \dots - \bar{a}_{n-4} s^4 - \bar{a}_{n-3} s^3 + \underline{a}_{n-2} s^2 + \underline{a}_{n-1} s. \quad (19)$$

На основе утверждения 1 сформулируем следующее утверждение.

Утверждение 2. Для асимптотической устойчивости характеристического семейства полиномов интервальной системы необходимо и достаточно устойчивости четырех доминирующих полиномов (16)–(19) этого семейства.

Как видно, полиномы (16)–(19) аналогичны полиномам Харитонова [2]. Однако в отличие от них доминирующие полиномы также предоставляют информацию о том, каким образом следует изменять коэффициенты, если хотя бы один из этих полиномов в результате проверки оказался неустойчивым.

Обозначим значения функции параметра в точках пересечения границы устойчивости доминирующими ветвями годографов портрета следующим образом: в области $\bar{D}_g - \bar{a}_g$, $\bar{D}_f - \bar{a}_f$, $\bar{D}_g - \bar{a}_g$, $\bar{D}_f - \bar{a}_f$. Выберем из них следующие:

$$\bar{a}_{\min} = \inf\{\bar{a}_g, \bar{a}_f\}; \quad (20)$$

$$\bar{a}_{\max} = \sup\{\bar{a}_g, \bar{a}_f\}. \quad (21)$$

Тогда, если начальные точки [5] доминирующих полиномов расположены в левой полуплоскости, то для асимптотической устойчивости интервального семейства (1) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\bar{a}_n < \bar{a}_{\min}. \quad (22)$$

Если часть начальных точек доминирующих полиномов расположена в правой полуплоскости и положительные ветви, выходящие из этих точек, пересекают границу устойчивости, для асимптотической устойчивости интервального семейства (1) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства:

$$\bar{a}_n < \bar{a}_{\min}; \quad (23)$$

$$\underline{a}_n > \bar{a}_{\max}. \quad (24)$$

Для нахождения значений \bar{a}_{\min} и \bar{a}_{\max} достаточно решить соответственно уравнения корневого годографа (13) и (12) и затем подставить полученные координаты ω в соответствующие уравнения параметра (15) и (14).

ВЫВОД

В рамках параметрического подхода имеется ряд условий устойчивости для систем с неопределенностью. Эти условия, однако, позволяют либо только проверить устойчивость, например [2], либо являются условиями гурвицевой робостной устойчивости [1], т. е. определяют некоторый диапазон устойчивости для номинальной устойчивой системы. В данной работе, благодаря рассмотрению корневых годографов семейства характеристических полиномов интервальной системы (ее корневого портрета), выявлены особенности динамики корней полиномов семейства в плоскости корней, что позволило получить условия устойчивости для исходной неустойчивой системы, которые дают возможность также рассчитать значения параметров, обеспечивающие эту устойчивость.

ЛИТЕРАТУРА

1. Поляк, Б. Т. Робастная устойчивость при комплексных возмущениях параметров / Б. Т. Поляк, Я. З. Цыпкин // *АиТ*. – 1991. – № 8. – С. 45–55.
2. Харитонов, В. Л. Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений / В. Л. Харитонов // *Дифференциальные уравнения*. – 1978. – Т. XIV, № 11. – С. 2086–2088.
3. Barmish, B. R. The robust root locus / B. R. Barmish, R. Tempo // *Automatica*. – 1993. – Vol. 26. – P. 183–192.
4. Римский, Г. В. Автоматизация исследований динамических систем / Г. В. Римский, В. В. Таборовец. – Минск: Наука и техника, 1978. – 336 с.
5. Несенчук, А. А. Анализ и синтез робастных динамических систем на основе корневого подхода / А. А. Несенчук. – Минск: ОИПИ НАН Беларуси, 2005. – 234 с.

Поступила 6.06.2006