УДК 539.3

КРИТЕРИЙ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕЛИНЕЙНО УПРУГОГО ПОВЕДЕНИЯ КОНСТРУКЦИЙ

Канд. техн. наук ШВЕД О. Л.

Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси

В настоящее время существует много пакетов прикладных программ для расчета напряженного состояния нагруженного твердого тела. Точность расчетов можно повысить, используя геометрически нелинейные модели упругой среды [1]. После вычисления поля напряжений с помощью критерия текучести определяются элементы конструкции, в которых начинаются необратимые деформации. Распространенная точка зрения состоит в использовании критериев Треска или Мизеса. Однако эти условия пластичности не имеют ни теоретического, ни экспериментального обоснования [2]. Уравнения, выражающие условия текучести, относятся, по сути, к физическим уравнениям среды. А, как недавно осознано, «проблема построения определяющих уравнений принципиально не может быть решена методами экспериментальной механики» [3]. Эксперимент должен опираться на теорию. Условия Треска или Мизеса получены из опытов с учетом простоты аналитической записи, и вопрос описания их эволюции не может быть решен удовлетворительно. Согласно [4] эти критерии противоречат известным экспериментально обнаруженным явлениям. При сложном зигзагообразном нагружении с разгрузкой одноосное пластическое растяжение больше действует, в смысле упрочнения, на последующее кручение для тонкостенной трубы и деформацию в поперечном направлении для плоского образца, чем на последующее растяжение. Следовательно, применение названных условий пластичности приводит к неоправданной потере точности.

Приемлемым решением выбора критерия для определения предельного состояния конструкции является использование условия пластичности Ишлинского

$$\tau_s^2(\tau_s^2+3J_2)+4J_2^3+27J_3^2=0, \qquad (1)$$

где J_2, J_3 − второй и третий инварианты $\operatorname{dev}\mathbf{T}$ − девиатора тензора напряжений Коши; τ_s − статический предел текучести при чистом сдвиге.

Более правильное и точное определение начала текучести возможно с использованием начального условия пластичности [5] в виде точного решения дифференциального уравнения

$$\frac{\mathrm{d}J_3}{\mathrm{d}J_2}+kJ_2=-\operatorname{sign}(J_3)\sqrt{k^2J_2^2-3^{-1}J_2+3kJ_3}, \qquad (2)$$

где

$$k=\frac{-2^{-1}(\lambda+\mu)}{(\mu+3\lambda-\sqrt{(3\lambda+2\mu)^2-2(\lambda+\mu)J_1})^2};$$

λ, μ − постоянные Ляме второго порядка; $J_1=\mathbf{E}\cdot\cdot\mathbf{T}$ − первый инвариант тензора $\mathbf{T}$; $\mathbf{E}$ − единичный тензор, две точки обозначают двойное скалярное произведение тензоров.

Попытаемся обосновать этот выбор. Условия пластичности (1) и (2) описывают отмеченные выше экспериментальные факты, но первый критерий в отличие от второго не учитывает явления Баушингера.

В [6] предложен новый общий подход к описанию механизма упругопластичности, основанный на принципе сохранения потенциальной природы упругой деформации в активном процессе. Девиатор нормали $\mathbf{N}$ к предельной поверхности отыскивается из условия потенциальности выражения $\overset{\Omega}{\mathbf{T}}\cdot\cdot\mathbf{NN}\cdot\cdot\delta\mathbf{D}$, где $\overset{\Omega}{\mathbf{T}}=\dot{\mathbf{T}}-\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{T}+\mathbf{T}\cdot\mathbf{\Omega}$, $\dot{\mathbf{T}}$ − материальная производная $\mathbf{T}$, вычисляемая по правилам упругости [1] (с учетом несжимаемости в скоростях $\mathbf{E}\cdot\cdot\mathbf{D}=0$); $\mathbf{\Omega}$ − спин тензора поворота сопровождающего упругую деформацию; $\delta\mathbf{D}$ − вариация тензора «деформации скорости» $\mathbf{D}$. Потенциальность указанного выражения означает существование скаляра $\varphi=\varphi(\mathbf{D})$ такого, что выполняется $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{D}}=\overset{\Omega}{\mathbf{T}}\cdot\cdot\mathbf{NN}$.

Дифференциальное уравнение (2) получено из условия потенциальности выражения $\overset{W}{\mathbf{T}}\cdot\cdot\mathbf{NN}\cdot\cdot\delta\mathbf{D}$, где $\overset{W}{\mathbf{T}}=\mathbf{T}-\mathbf{W}\cdot\mathbf{T}+\mathbf{T}\cdot\mathbf{W}$; $\mathbf{W}$ − тензор вихря. Объективные О-производная и яуманновская производная тензора напряжений Коши связаны соотношением

$$\overset{\Omega}{\mathbf{T}}=\overset{W}{\mathbf{T}}+(\mathbf{W}-\mathbf{\Omega})\cdot\mathbf{T}-\mathbf{T}\cdot(\mathbf{W}-\mathbf{\Omega}).$$

В рассматриваемый момент общая деформация и поворот совпадают с упругими. Искомый девиатор $\mathbf{N}$ соосен тензору $\mathbf{T}$. Поэтому имеем

$$((\mathbf{W}-\mathbf{\Omega})\cdot\mathbf{T}-\mathbf{T}\cdot(\mathbf{W}-\mathbf{\Omega}))\cdot\cdot\mathbf{N}=$$
$$=(\mathbf{W}-\mathbf{\Omega})\cdot\cdot(\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}-\mathbf{N}\cdot\mathbf{T})=0.$$

Следовательно, учитывая отмеченную общность подхода и, значит, возможность замены закона Мурнагана на простой квазилинейный закон Синьорини [1], можно утверждать, что точное решение уравнения (2) действительно является начальным условием текучести согласно [6]. Отметим также, что кривые пластичности, приведенные в [6], вычислены при ненулевом начальном напряжении, а в условиях изотропии среды они практически совпадают.

Решение задачи Коши для уравнения (2) с начальным условием:

$$J_2=-\tau_s^2;\ J_3=0$$

имеет вид [5]:

$$\frac{1+C}{1+D}-\frac{1+A}{1+B}=0; \qquad (3)$$

$$A=-3(k\tau_s)^2+6kE,\quad C=3k^2J_2+6kF;$$

$$B=-3(k\tau_s)^2+18(k\tau_s)^4+6k(1-3(k\tau_s)^2)E;$$

$$D=3k^2J_2+18(k^2J_2)^2+27k^3J_3+6k(3k^2J_2+1)F;$$

$$E=\mathrm{sign}(J_3)\tau_s\sqrt{k^2\tau_s^2+3^{-1}};$$

$$F=\mathrm{sign}(J_3)\sqrt{(kJ_2)^2-3^{-1}J_2+3kJ_3}.$$

Однако ввиду численных погрешностей соотношение (3) использовать в приложениях затруднительно, так как величины A, B, C, D очень малы. Преобразуем его к более удобному виду:

$$K=(b-a+c-d+3x(cb-da))x^{-2}=0; \qquad (4)$$

$$a=-x+2s\sqrt{x^2+3^{-1}};$$

$$b=-x+6x^3+2s(1-3x^2)\sqrt{x^2+3^{-1}};$$

$$c=-o^2x+2so\sqrt{o^2x^2-2(\sqrt{3})^{-1}vox+3^{-1}};$$

$$d=-o^2x+6o^4x^3-2\sqrt{3}vo^3x^2+$$
$$+2so(1-3o^2x^2)\sqrt{o^2x^2-2(\sqrt{3})^{-1}vox+3^{-1}}.$$

Здесь обозначены безразмерные величины:
- кубическая степень параметра Лоде

$$v=-2^{-1}\cdot3\sqrt{3}J_3(-J_2)^{-\frac{3}{2}};$$

- $x=k\tau_s$;
- $o=\tau_s^{-1}\sqrt{-J_2}$;
- $s=\mathrm{sign}(v)$.

Условие (1) также необходимо нормировать для практических приложений.

При условии $s=0$ определение момента начала необратимых деформаций заключается в проверке неравенства

$$\sqrt{-J_2}\geq\tau_s.$$

Предполагаем дальше, $|s|=1$. Искомый критерий запишется как

$$K\leq0. \qquad (5)$$

Как следует из анализа кривых пластичности, точность решений относительно критериев Треска, Мизеса, Ишлинского может быть максимально улучшена на 50, 25, и 8,3 % соответственно, если экспериментально определяемые величины τ_s для них совпадают, и в более чем три раза меньше в худшем случае, если пределы текучести различные [4].

Разлагая критериальную величину K в ряд по малой величине x, возьмем первые два члена – линейную часть K:

$$K = 2\sqrt{3}((v + s)o^3 - s) + 6x(-(1 + vs)o^4 + \\ + 2s(s + v)o^3 - 2s^2 o + 1) = 0. \tag{6}$$

Погрешность приближения (6) уравнения (4) не превосходит приблизительно 2 %. Оценки проводились для металлов и сплавов согласно данным [1].

По теореме Декарта уравнение (6) относительно неизвестной величины o имеет при данных параметрах (x − мало, $-1 \le v \le 1$) два комплексных корня, и один из действительных – положительный. Хорошее его приближение получается по методу Чебышева третьего порядка за одну итерацию с начальной точки $o = 1$

$$o_0 = 1 - |v|(sx\sqrt{3} + 1)((sx2\sqrt{3} + 3)|v| + 3)^{-1} - \\ - 3(|v| + 1)v^2(sx\sqrt{3} + 1)^2((sx2\sqrt{3} + 3)|v| + 3)^{-3}. \tag{7}$$

Положим, например $x = -0{,}0003$. Тогда при $v = 1$; $v = -1$ получаем $o_0 = 0{,}805628$; $o_0 = 0{,}805483$, а в качестве решения уравнения (6) $o = 0{,}793786$; $o = 0{,}793615$. Приближенное значение предела текучести при сжатии оказалось чуть больше соответствующего значения при растяжении.

Приближенный критерий запишется как:

$$o \ge o_0; \quad o = \tau_s^{-1}\sqrt{-J_2}. \tag{8}$$

Возможно, здесь уместно вспомнить слова А. И. Лурье: «Решения нелинейной теории заставляют отказаться от некоторых привычных представлений линейной теории» [1].

ВЫВОДЫ

1. Для точных расчетов использование критериев текучести Треска и Мизеса нецелесообразно. Возможно применение условия пластичности максимального приведенного напряжения (Ишлинского).

2. Для геометрически нелинейной модели сплошной среды [1] предложен обоснованный критерий определения предельного состояния для элементов конструкции (4), (5). Предполагается, что элементы находятся в упругом состоянии. Возможна неоднородность конструкции, учитываемая параметрами Ляме второго порядка. Критерий слабо зависит от гидростатического давления, что соответствует экспериментальным данным. Требуется знать пределы текучести для рассматриваемых материалов конструкции из опытов на кручение. Материал должен быть изотропным.

3. Получен упрощенный вариант критерия (7), (8) для инженерных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лурье, А. И.** Нелинейная теория упругости / А. И. Лурье. – М., 1980. – 512 с.

2. **Жилин, П. А.** Математическая теория неупругих и сыпучих сред // VIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике: аннотации докладов / П. А. Жилин. – Пермь, 2001. – С. 260–261.

3. **Жилин, П. А.** Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве / П. А. Жилин. – СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2001. – 275 с.

4. **Качанов, Л. М.** Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М.: Наука, 1969. – 420 с.

5. **Махнач, В. И** Начальное условие пластичности / В. И. Махнач, О. Л. Швед // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2003. – № 3. – С. 95–99.

6. **Швед, О. Л.** К теории упругопластичности при конечных упругих деформациях и поворотах / О. Л. Швед // Даклады НАН Беларусі. – 2005. – Т. 49, № 3. – С. 45–48.

Поступила 15.11.2005