

ДИНАМИКА КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ, ПРИКРЕПЛЕННОГО К УПРУГОМУ ЭЛЕМЕНТУ

Асп. ЛУГОВОЙ И. В., канд. техн. наук, доц. ЛУГОВОЙ В. П.

Белорусский национальный технический университет

Упругие тела имеют широкое применение в технике [1] для аккумуляции механической энергии, в качестве чувствительных элементов в измерительных системах, для создания силового контакта и натяга между деталями, в качестве упругих опор, амортизаторов и пр. Они могут воспринимать действие вынужденных колебаний в широком диапазоне частот. Колебания упругих тел рассмотрены в [2–4], но наиболее близкое решение задач по расчету динамики колебаний стержней приведено в [5]. Однако опыт использования упругих тел в ультразвуковых системах весьма ограничен их применением в устройствах в качестве передающего или рабочего инструмента [6–9]. В связи с этим данный вопрос требует углубленного теоретического и экспериментального исследования.

На основании проведенного анализа авторами была поставлена цель изучить возможность применения упругих элементов в акустических технологических системах. Предварительные исследования показали, что данной цели в наибольшей мере соответствуют такие элементы, как круглые кольца, кольца с плоско-овальной и эллиптической формой, винтовые и плоские пружины, витые трубчатые пружины с различным поперечным сечением, сифонные упругие тела и пр.

В настоящей статье рассматривается обобщенная колебательная система, состоящая из упругого элемента и рабочего инструмента (рис. 1а). В качестве последнего предложен стержень с круглым поперечным сечением. Расчетная схема, состоящая из упругого элемента и длинного стержня, приведена на рис. 1б. Упругий элемент 1 условно представлен в виде пружины, а стержень 2 имеет длину l и площадь поперечного сечения F (рис. 1б). При сжатии пружины статической силой на ее нижнем торце возникает статическая сила P , а в сечении стержня – нормальная сила N , вызывающая деформацию сжатия u_x . Общее линейное перемещение стержня будет складываться из статической u_c и динамической u_d составляющих $u = u_c + u_d$.

Статическое перемещение верхнего торца стержня, подвешенного на пружине, складывается из упругой деформации пружины u_{01} и деформации стержня по длине

$$u_c = u_{01} + u_x.$$

Согласно закону Гука

$$\frac{N}{F} = E \frac{\Delta l}{l}, \quad (1)$$

где E – модуль упругости; N – нормальная сила; F – площадь сечения; Δl – удлинение стержня.

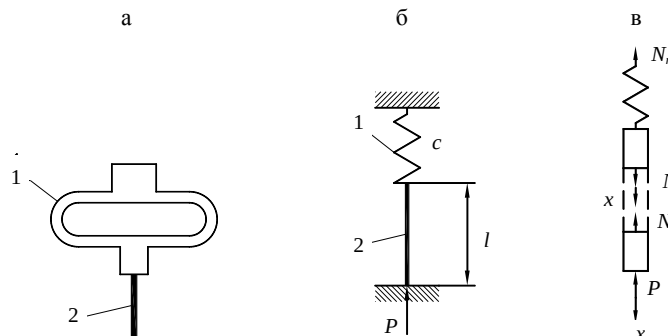


Рис. 1. а – общий вид механической системы; б – расчетная схема; в – схема действия сил

Переходя к пределу $\Delta x \rightarrow 0$, уравнение (1) можно записать для относительного удлинения

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = u'_x. \quad (2)$$

Силу упругости пружины можно рассчитать по формуле

$$N_n = ku, \quad (3)$$

где k – коэффициент упругости.

Если весом стержня пренебречь ввиду малости, то из рис. 1в можно видеть, что нормальное усилие в стержне равно усилию сжатия пружины и усилию на торце стержня

$$N = N_n = P. \quad (4)$$

Обозначим через $u(x)$ смещения в произвольном сечении стержня $0 \leq x \leq l$.

Из (1) и (4) следует, что в произвольном сечении длиной x усилие сжатия равно

$$N = EFu'_x = EF \frac{du}{dx}. \quad (5)$$

Подставив (3) в (5), получим $EFu'_x = ku$ или $N_x = EFu'_x = ku_{01}$.

Рассматриваемая система может иметь два крайних случая:

- первый, когда верхний конец стержня свободный, т. е. жесткость пружины нулевая;
- второй, когда верхний торец неподвижен, т. е. зашцеplen.

Граничные условия:

- при $x = 0$ $u' = \frac{k}{EF} u$.
- при $x = l$ $P = -EFu'_l$.

Так как статическая составляющая от деформации пружины $u'_c = hu_c$, то можно записать

$$h = \frac{k}{EF}. \quad (6)$$

В первом случае $k = 0$. Верхний конец стержня свободный, и усилие в нем равно нулю. Перемещение верхнего конца равно перемещению пружины

$$u_x = -\frac{P}{k}. \quad (7)$$

Во втором случае $k = \infty$ означает, что верхний торец стержня неподвижен, т. е. $u = 0$. Перемещение стержня без пружины в произвольном сечении x равно

$$u_x = \frac{Px}{EF}. \quad (8)$$

Суммируя (7) и (8), получим общее перемещение для произвольного сечения:

$$u_x = \frac{P}{k} + \frac{Px}{EF} = \frac{P}{EF} \left(\frac{EF}{k} + x \right). \quad (9)$$

Из уравнения (9) следует, что величина перемещения стержня зависит от упругих свойств пружины k и жесткости поперечного сечения стержня EF , а усилие на верхнем конце стержня при $x = 0$ соответствует усилию сжатия стержня на пружине, т. е.

$$N_{x=0} = P = EFu'_0 = ku. \quad (10)$$

Таким образом, можно заключить, что на величину усилия P при статическом сжатии стержня влияют деформация упругого тела u_{01} и коэффициент упругости k .

Следовательно, для создания предварительного натяга торца стержня к опоре необходимо изменить параметр k . Техническое решение данного положения может быть достигнуто изменением характеристик упругого элемента, в частности применением упругого элемента с регулируемой жесткостью. Авторами статьи для этой цели предложена конструкция ультразвуковой технологической системы, в которой упругим элементом служит сильфон (рис. 2) [10].

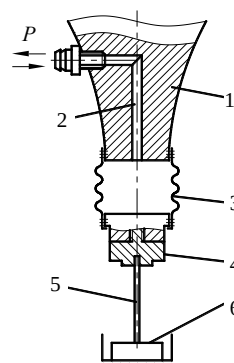


Рис. 2. Устройство для регулирования упругости сильфона

Устройство состоит из преобразователя и волновода ультразвуковых колебаний 1 с отверстием 2, жестко и герметично соединенного с ним гофрированного сильфона 3, используемого в качестве упругого элемента. К нижнему торцу сильфона герметично закреплен фланец 4 с резьбовым отверстием для соединения со сменным рабочим инструментом 5. Рабочий инструмент применяется для выполнения технологической операции, воздействуя на объект 6 в виброударном режиме. В отверстие 2 волновода 1 осуществляется подача рабочей среды в полость сильфона 3 под давлением P . Варьированием P в полости достигают изменения жесткости упругого элемента, что соответственно сопровождается изменением частоты и амплитуды собственных колебаний сильфона.

Динамическая составляющая $u_d(x, t)$ может быть определена из волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (11)$$

где $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ – скорость звука в стержне, равная скорости движения волны в стержне.

Рассмотрим колебания стержня, подвешенного на пружине (рис. 3а), вызванные действием периодической динамической силы $P_d = P_0 \sin \omega t$

$$\text{или } P_d = \frac{EF 2\pi v A}{c}.$$

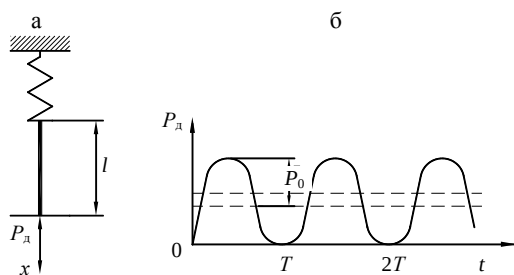


Рис. 3. а – расчетная схема стержня, закрепленного к пружине; б – закон изменения динамической силы

Пусть динамическая сила (рис. 3б) вызывает перемещения

$$u_d = A_1 x \sin \omega t + A_2 x \cos \omega t. \quad (12)$$

Продифференцируем (12) и подставим в волновое уравнение (11)

$$\left[A_1'' x + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 A_1 x \right] \sin \omega t + \left[A_2'' x + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 A_2 x \right] \cos \omega t = 0.$$

Откуда:

$$\begin{cases} A_1'' x + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 A_1 x = 0; \\ A_2'' x + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 A_2 x = 0. \end{cases}$$

Краевые условия:

$$A_1 0 = A_2 0 = 0;$$

$$A_1' l = A_2' l = 0.$$

Далее:

$$A_1 x = c_1 \sin \frac{\omega x}{c} + c_2 \cos \frac{\omega x}{c};$$

$$A_2 x = c_3 \sin \frac{\omega x}{c} + c_4 \cos \frac{\omega x}{c}.$$

Постоянные интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 запишутся из краевых условий:

$$C_1 \frac{\omega}{c} \cos \frac{\omega l}{c} = 0; \quad C_2 = 0;$$

$$C_3 \frac{\omega}{c} \cos \frac{\omega l}{c} = 0; \quad C_4 = 0.$$

Учитывая, что C_1 и C_3 одновременно не могут быть равными нулю, $\cos \frac{\omega l}{c} = 0$.

Корнями этого уравнения будут

$$\omega_n = \frac{\pi 2n+1 c}{2l} \quad \text{для } n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (13)$$

ω_n называется собственными частотами стержня.

Учитывая, что n имеет бесконечное число значений, можно утверждать о бесконечно большом количестве степеней свободы у стержня. Уравнение динамических перемещений u_d примет вид

$$u_d = \sum_{n=0}^{\infty} c_{1n} \sin \frac{\pi 2n+1 x}{2l} \sin \frac{\pi 2n+1 ct}{2l} +$$

$$+ c_{3n} \sin \frac{\pi}{2l} \frac{2n+1}{2} x \sin \frac{\pi}{2l} \frac{2n+1}{2} ct,$$

где c_{1n} и c_{3n} – постоянные, определяемые из начальных условий:

$$u_d(x, t=0) = -\frac{N}{EF} x;$$

$$-\frac{N}{EF} x = \sum_{n=0}^{\infty} c_{3n} \sin \frac{\pi}{2l} \frac{2n+1}{2} x.$$

Разложим выражение в ряд Фурье, где c_{3n} будет являться коэффициентом этого разложения. Умножим левую и правую части на $\sin \frac{\pi}{2l} \frac{2m+1}{2} x$, где $m = 0, 1, 2, \dots$ и, проинтегрировав в пределах $0 \leq x \leq l$, получим

$$I_{nm} = \int_0^l \sin \frac{\pi}{2l} \frac{2n+1}{2} x \sin \frac{\pi}{2l} \frac{2m+1}{2} x dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^l \left[\cos \frac{\pi}{l} \frac{n-m}{2} x - \cos \frac{\pi}{l} \frac{n+m+1}{2} x \right] dx.$$

$$\text{Здесь } I_{nm} = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m; \\ \frac{1}{2} l & \text{при } n = m. \end{cases}$$

Следовательно:

$$c_{3n} = -\frac{2N}{EFl} \int_0^l x \sin \frac{\pi}{2l} \frac{2n+1}{2} x dx =$$

$$= \frac{8}{\pi^2} \frac{Nl}{EF} \frac{-1}{2n+1} \frac{n+1}{2}. \quad (14)$$

Вторую постоянную c_{1n} найдем из условия $\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0$, так как в начальный момент скорости всех сечений стержня равны нулю:

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} c_{1n} \frac{\pi}{2l} \frac{2n+1}{2} c \sin \frac{\pi}{2l} \frac{2n+1}{2} x,$$

т. е. $c_{1n} = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Таким образом

$$u_d(x, t) = \frac{8Nl}{\pi^2 EF} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{2n+1} \frac{n+1}{2} \times$$

$$\times \sin \frac{\pi}{2l} \frac{2n+1}{2} x \cos \frac{\pi}{2l} \frac{2n+1}{2} ct. \quad (15)$$

Уравнение (15) показывает, что число гармонических колебаний стержня бесконечно. Подставив в (15) $N = -P_d$, окончательно получим

$$u_d(x, t) = -\frac{8P_d l}{\pi^2 EF} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{2n+1} \frac{n+1}{2} \times$$

$$\times \sin \frac{\pi}{2l} \frac{2n+1}{2} x \cos \frac{\pi}{2l} \frac{2n+1}{2} ct. \quad (16)$$

Из уравнения (16) следует, что перемещение от динамических сил зависит от величины динамической силы, жесткости поперечного сечения и длины стержня.

Общее перемещение конца стержня складывается из перемещения от действия динамической P_d и статической P сил, т. е. $u = u_c + u_d$.

Граничные условия запишем исходя из того, что любое сечение стержня перемещается по гармоническому закону:

$$\text{при } x=0 \quad \frac{\partial u_d}{\partial x} = hu_d;$$

$$\text{при } x=l \quad EF \frac{\partial u}{\partial x} = -P_d.$$

Здесь статическая составляющая от деформации пружины $u'_c = hu_c$ из уравнения (6).

Действие стержня на опорную поверхность имеет периодический характер и будет характеризоваться пульсацией нагрузки $P_d t$ с частотой колебаний стержня (рис. 3б). Поэтому, учитывая периодичность функции $P_d t$, ее можно разложить в ряд Фурье

$$P_d t = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \sin \omega_k t + \beta_k \cos \omega_k t,$$

где α_k и β_k – коэффициенты разложения $\alpha_k = \int_0^T P_d t \sin \omega_k t dt$; $\beta_k = \int_0^T P_d t \cos \omega_k t dt$, а собственные круговые частоты $\omega_k = 2\pi v$.

Следовательно, краевое условие при $x=l$ на торце стержня запишется:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{EF} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \sin \omega_k t + \beta_k \cos \omega_k t. \quad (17)$$

В силу краевых условий решение уравнения можно представить в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x, t),$$

где функция $u_k(x, t)$ есть решение краевой задачи для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}.$$

Краевые условия:

$$\text{при } x = 0 \quad \frac{\partial u_k}{\partial x} = hu_k,$$

$$\text{при } x = l \quad \frac{\partial u_k}{\partial x} = -\frac{1}{EF} \alpha_k \sin \omega_k t + \beta_k \cos \omega_k t.$$

Решение задачи ищем в виде

$$u_k(x, t) = a_k(x) \sin \omega_k t + b_k(x) \cos \omega_k t.$$

Откуда получаем систему:

$$\begin{cases} a_k''(x) + \left(\frac{\omega_k}{c}\right)^2 a_k(x) = 0; \\ b_k''(x) + \left(\frac{\omega_k}{c}\right)^2 b_k(x) = 0. \end{cases}$$

Краевые условия:

$$\text{при } x = 0 \quad a_k' = ha_k; \quad b_k' = hb_k;$$

$$\text{при } x = l \quad a_k' = -\frac{\alpha_k}{EF}; \quad b_k' = -\frac{\beta_k}{EF}.$$

Приведем функцию u_k к виду

$$u_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \sin\left(\omega_k t + \arctg \frac{\alpha_k}{\beta_k}\right),$$

решением которой будет

$$u(x, t) = \frac{c}{EF} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}{\omega_k} \times \left[\frac{ch \cdot \sin \frac{\omega_k x}{c} + \omega_k \cos \frac{\omega_k x}{c}}{\omega_k \sin \frac{\omega_k l}{c} - ch \cdot \cos \frac{\omega_k l}{c}} \right] \sin\left(\omega_k t + \arctg \frac{\alpha_k}{\beta_k}\right). \quad (18)$$

Зависимость (18) свидетельствует о том, что искомое динамическое перемещение взаимосвязано с параметром упругости пружины h .

Одними из возможных способов реализации данного положения являются предложенные авторами статьи ультразвуковые устройства [11, 12], в которых используются различные виды упругих элементов: упругое кольцо (рис. 4а), овал с плоскопараллельными сторонами (рис. 4б), мембранная коробочка (рис. 4в). Ультразвуковое устройство состоит из пьезоэлектрического преобразователя 1, волновода 2, упругого элемента 3 и соединенного с ним рабочего инструмента 4, воздействующего на объект.

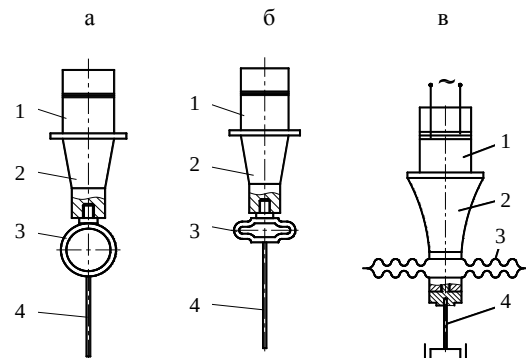


Рис. 4. Акустические системы с упругими элементами

ВЫВОДЫ

1. Получены математические зависимости, позволяющие оценить влияние статической и динамической составляющих перемещений стержня, закрепленного на упругом элементе.

2. Предложена математическая модель динамических процессов стержня, прикрепленного к пружине, на основе решения волнового уравнения. Полученные формулы позволяют оценить влияние упругих свойств пружины на перемещение стержня.

3. Разработаны устройства и акустическая система с упругими элементами для прошивки отверстий в хрупких материалах, позволяющие повысить производительность обработки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреева, Л. А. Упругие элементы приборов / Л. А. Андреева; под ред. В. И. Феодосьева. — М., 1962. — 462 с.
2. Ильин, М. М. Теория колебаний: учеб. для вузов / М. М. Ильин, К. С. Колесников, Ю. С. Саратов; под общ.

ред. К. С. Колесникова. – М.: Изд-во МГТУ имени Н. Э. Баумана, 2003. – 272 с.

3. **Пфейффер, П.** Колебания упругих тел: пер. с нем. / П. Пфейффер. – Л., 1934. – 154 с.

4. **Тимошенко, С. П.** Курс теории упругости / С. П. Тимошенко; под ред. Э. И. Глиголюка. – Киев: Наук. думка, 1972. – 500 с.

5. **Симонов, В. В.** Волновые процессы в бурильной машине / В. В. Симонов. – М.: МИНХиГП, 1979. – 113 с.

6. **Ультразвуковой** инструмент: а. с. СССР 38243, МКИ В 06в 3/00, В 23р 1/00 / А. А. Горбунов, В. М. Салтанов [и др.]; опубл. 23.05.73 // Бюл. изобрет. – 1973. – № 23.

7. **Устройство** для ультразвукового полирования: а. с. СССР 854685, МКИ В 24 в 1/04, В 06 в 1/00 / В. Ф. Зимовец, П. М. Герасимчук, С. Н. Стручков; опубл. 15.08.81 // Бюл. изобрет. – 1981. – № 30.

8. **Излучатель** изгибных колебаний: а. с. СССР 657868, МКИ В 06/ в 1/00 / Ю. С. Андреев, В. Н. Бокановский; опубл. 25.04.79 // Бюл. изобрет. – 1979. – № 15.

9. **Вибрационный** преобразователь: а. с. СССР 315479, МКИ В 06 в 1/08 / В. И. Каспирович; опубл. 01.10.71 // Бюл. изобрет. – 1971. – № 29.

10. **Ультразвуковой** инструмент для обработки отверстий: пат. полезной модели РБ, 8169, МПК В24В 1/04, В06В 1/00 / И. В. Луговой, В. Т. Минченя, В. П. Луговой; опубл. 30.04.2012.

11. **Устройство** для ультразвуковой обработки: заявка на пат. на полезную модель № 8458 от 03.01.12 / И. В. Луговой, В. Т. Минченя, В. П. Луговой.

12. **Устройство** для модуляции колебаний акустической системы: заявка на пат. на полезную модель № 8169 16.01.12 / И. В. Луговой, В. Т. Минченя, В. П. Луговой.

Поступила 21.06.2012.

УДК 629.113/115

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ИЗУЧЕНИИ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ И НАГРУЖЕННОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ ГИДРОУСИЛИТЕЛЯ РУЛЯ С РОТОРНЫМ РАСПРЕДЕЛИТЕЛЕМ

Кандидаты техн. наук, доценты МИХАЙЛОВ В. В., СТРОК Е. Я.

ГНУ «Объединенный институт машиностроения» НАН Беларуси

В ряде работ были предложены модели рулевого управления автомобиля с гидроусилителем, имеющим в своем составе роторный распределитель. Его математический аналог позволяет исследовать, а также сравнивать различные варианты конструкций распределителей лишь при наличии известных, предварительно установленных характеристик расходов и давлений.

При оценке качества гидромеханического рулевого управления на предлагаемой модели основными условиями являются представление гидравлических и механических контуров с последующей проверкой адекватности расчетов совокупности механических и гидравлических явлений. Последующее усовершенствование изделия, например путем включения адаптивных

и корректирующих контуров, в этом случае более понятно при определении влияния конструктивных изменений на добротность системы.

Основой модели рулевого управления с гидроусилителем и роторным распределителем является его гидравлический многопоточный прототип с наложенными на него механическими зависимостями или связями. Такая качественная модель может быть успешно использована на программно-аппаратных платформах в качестве виртуально-натурного объекта исследований в реальном режиме времени.

Исследуемая схема рулевого управления мобильной машины с гидроусилителем и рулевым механизмом совмещенного типа, содержащим гидравлический и механический контуры, изображена на рис. 1.