

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= (1 - tb'_k + t^2 d_{k1} + \dots + t^r d_{k\ r-1})[b_k, 1 + \\ &\quad + tb'_k + t^2 c_{k1} + \dots + t^r c_{k\ r-1}] = \\ &= t[b_k, b'_k] + t^2 x_{k+11} + \dots + t^{2r} x_{k+1\ 2r-1} \in B_{k+1}. \end{aligned}$$

Поскольку это соотношение верно при любых $t \in F$, то повторяя процедуру, описанную выше, т. е. переходя к системе вида (5), получим $[b_k, b'_k] \in B_{k+1}$, и так как b_k и b'_k независимы, то

$$[B_k, B_k] = B_k^{(2)} \subset B_{k+1}. \quad (9)$$

Так как (9) верно для любых натуральных $k > 1$, то с учетом (1), (7), (8) получим

$$\begin{aligned} \langle 0 \rangle &= \langle G_0^{(n+1)} \rangle \supseteq B_{n+1} \supseteq B_n^{(2)} \supseteq B_{n-1}^{(3)} \supseteq \\ &\supseteq \dots \supseteq B_2^{(n)} \supseteq (A^{(2)})^{(n)} = A^{(n+1)}, \end{aligned}$$

что доказывает теорему.

С л е д с т в и е. Если $\text{char } F \neq 2$, то разрешимая класса n присоединенная группа A^* нильалгебры A над бесконечным полем F имеет нильпотентный нормальный делитель H такой, что факторгруппа A^*/H разрешима класса не выше δ .

Доказательство. Из теоремы следует раз-

решимость алгебры A . Поэтому осталось применить результаты [1, 2].

Отметим, что ограничение на характеристику поля вызвано аналогичным ограничением в [2] и не ясно, является ли оно существенным для нильалгебр. Весьма вероятным кажется предположение, что нильалгебра над полем характеристики 2, разрешимая как алгебра Ли, имеет разрешимую присоединенную группу. Для нильалгебр экспоненты 4 это доказано в [3].

ВЫВОД

Нильалгебра над бесконечным полем с разрешимой присоединенной группой разрешима как алгебра Ли того же класса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Залесский А. Е., Смирнов М. Б. Ассоциативные кольца, удовлетворяющие тождеству лиевой разрешимости // Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1982. – № 2. – С. 15–20.
2. Смирнов М. Б. О группе единиц ассоциативного кольца, удовлетворяющего тождеству лиевой разрешимости // Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1983. – № 5. – С. 20–23.
3. Смирнов М. Б. Присоединенные группы нильалгебр экспоненты 4 над полем характеристики 2 // Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1988. – № 5. – С. 8–13.
4. Jennings S. A. Radical Rings with Nilpotent Associated Groups // Trans. Royal Soc. Can., 1955. – V. XLIX, ser. III. – P. 31–38.

УДК 517.9

ПОТОЧЕЧНАЯ СХОДИМОСТЬ ОБРАТНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В УСЛОВИЯХ ДИНИ*

ДУБРОВИНА О. В.

Белорусский национальный технический университет

Существование обратного вейвлет-преобразования в смысле сходимости в пространстве $L_2(R)$ установлена различными способами [1, с. 287]. Что касается поточечной сходимости, то в большинстве монографий и статей,

посвященных интегральным вейвлет-преобразованиям, приводятся, как правило, доказательства, полученные при дополнительных условиях на базовый вейвлет ψ [1–3]. Установленное ниже утверждение является аналогом соответ-

* Работа выполнена при частичной поддержке Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь.

ствующего классического результата для интегрального преобразования Фурье [1, с. 116] и дается в естественных предположениях на функцию x .

Теорема. Пусть $\psi \in L_2(R)$ – базовый вейвлет, удовлетворяющий условию согласованности:

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(f)|^2}{|f|} df < \infty. \quad (1)$$

Тогда для любой функции $x \in L_2(R)$ выполняется включение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (W_\psi x)(a, b) \psi_{a, b}(t) \frac{dad b}{a^2} \in L_2(R) \quad (2)$$

и справедлива формула обращения в смысле сходимости в пространстве $L_2(R)$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (W_\psi x)(a, b) \psi_{a, b}(t) \frac{dad b}{a^2}. \quad (3)$$

Более того, если функция $x \in L_2(R)$ удовлетворяет в некоторой точке $t_0 \in R$ условию Дини, т. е. при некотором $\delta > 0$ интеграл

$$\int_0^\delta \frac{|x(t_0 + h) - x(t_0)|}{h} dh < \infty \quad (4)$$

конечен, то обратное интегральное вейвлет-преобразование сходится в точке t_0 и имеет место равенство

$$x(t_0) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (W_\psi x)(a, b) \psi_{a, b}(t_0) \frac{dad b}{a^2}, \quad (5)$$

где

$$\psi_{a, b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad (6)$$

$$(W_\psi x)(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \overline{\psi_{a, b}(t)} dt. \quad (7)$$

Доказательство.
По определению

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (W_\psi x)(a, b) \psi_{a, b}(t) \frac{dad b}{a^2} =$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ A, B \rightarrow +\infty}} \int_{\varepsilon < |a| < A} \int_{|b| < B} (W_\psi x)(a, b) \psi_{a, b}(t) \frac{dad b}{a^2}.$$

Обозначим

$$S(\varepsilon, A, B) = \int_{\varepsilon < |a| < A} \int_{|b| < B} (W_\psi x)(a, b) \psi_{a, b}(t) \frac{dad b}{a^2}.$$

Интеграл $S(\varepsilon, A, B)$ сходится абсолютно для любых фиксированных $0 < A < B$ и $\varepsilon > 0$, так как каждый множитель подынтегрального выражения принадлежит пространству $L_2\left(R^2, \frac{dad b}{a^2}\right)$. Заметим, что для любой функции $x \in L_2(R)$ верно равенство

$$\|x - S(\varepsilon, A, B)x\|_{L_2} = \sup_{\|y\|_{L_2}=1} \|\langle x - S(\varepsilon, A, B)x, y \rangle\|,$$

где $\langle x, y \rangle$ – скалярное произведение функций x и y , определяемое формулой

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \overline{y(t)} dt.$$

По теореме Фубини [2, с. 317] имеем

$$\begin{aligned} \langle S(\varepsilon, A, B)x, y \rangle &= \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \left(\int_{\varepsilon < |a| < A} \int_{|b| < B} (W_\psi x)(a, b) \psi_{a, b}(t) \frac{dad b}{a^2} \right) dt = \\ &= \int_{\varepsilon < |a| < A} \int_{|b| < B} (W_\psi x)(a, b) \overline{(W_\psi y)(a, b)} \frac{dad b}{a^2}. \end{aligned}$$

Отсюда и из аналога равенства Парсеваля [3, с. 59]

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (W_\psi x)(a, b) \overline{(W_\psi y)(a, b)} \frac{dad b}{a^2} \quad (8)$$

следует, что скалярное произведение $\langle S(\varepsilon, A, B)x, y \rangle$ ограничено относительно $\varepsilon > 0$, $0 < A < B$ для любых фиксированных $x, y \in L_2(R)$. Таким образом, установлено включение (2).

В соответствии с равенством (8) и неравенством Коши – Буняковского – Шварца [4, с. 143]

$$\begin{aligned} & \|x - S(\varepsilon, A, B)x, y\| = \\ & = \left\| \iint_{\{\varepsilon < |a| < A, |b| < B\}} (W_\psi x)(a, b) \overline{(W_\psi y)(a, b)} \frac{dadb}{a^2} \right\| \leq \\ & \leq \left(\iint_{\{\varepsilon < |a| < A, |b| < B\}} |(W_\psi x)(a, b)|^2 \frac{dadb}{a^2} \right)^{1/2} \|y\|_{L_2}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} & \{\varepsilon < |a| < A, |b| < B\}^c = \\ & = \{(a, b) \in R^2 : (a, b) \notin \{\varepsilon < |a| < A, |b| < B\}\}. \end{aligned}$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ и $A, B \rightarrow +\infty$ область интегрирования стремится к пустому множеству, таким образом, интеграл стремится к нулю, а следовательно, $\|x - S(\varepsilon, A, B)x\|_{L_2} \rightarrow 0$.

Таким образом, интеграл в формуле (3) определяет обратное вейвлет-преобразование.

Для завершения доказательства установим равенство (5) в точках, в которых выполнено локальное условие Дини (4). Для доказательства формулы (5) заметим, что так же, как и в случае преобразования Фурье, необходимо прежде всего представить постоянную величину $x(t_0)$ в виде интегрального выражения, похожего на стоящее в правой части выражение (5). Поскольку из условия согласованности вытекает, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0, \quad (9)$$

непосредственное применение преобразования, стоящего в правой части (5), к постоянной величине $x(t_0)$ дает нулевой результат. Следовательно, такой подход не подходит.

В теории интегрального вейвлет-преобразования известно [1, с. 285], что экспоненциальная функция инвариантна относительно преобразования (7) и, следовательно, имеет место формула обращения для $x(t) = x_\xi(t) = e^{2\pi i \xi t}$, т. е. для любого фиксированного значения параметра $\xi \in R$ выполняется равенство

$$e^{2\pi i \xi t_0} = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (W_\psi x_\xi)(a, b) \psi_{a,b}(t_0) \frac{dadb}{a^2}, \quad (10)$$

где интегралы понимаются, как и ранее, в смысле главного значения.

Умножая последнее равенство на постоянную $x(t_0)$ и перенося экспоненциальный множитель в правую часть, имеем

$$x(t_0) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (W_\psi x(t_0) x_\xi)(a, b) \psi_{a,b}(t_0) e^{-2\pi i \xi t_0} \frac{dadb}{a^2}. \quad (11)$$

Не ограничивая общности, можно считать далее, что базовый вейвлет ψ является вещественно-значной функцией. Таким образом, утверждение теоремы совпадает с утверждением о равенстве следующих интегралов (их существование установлено, например, в [1, с. 287] и является простым следствием неравенства Коши – Буняковского – Шварца):

$$\frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \psi_{a,b}(\tau) \psi_{a,b}(t_0) \frac{da}{a^2} db d\tau \quad (12)$$

и

$$\frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t_0) e^{2\pi i \xi(\tau-t_0)} \psi_{a,b}(\tau) \psi_{a,b}(t_0) \frac{da}{a^2} db d\tau. \quad (13)$$

Так как существование интегралов в (12), (13) установлено, к каждому из них можно применить теорему Фубини и считать внутренними интегралами, например, интегралы по переменной b (которые являются в обоих случаях одинаковыми). Рассмотрим эти интегралы

$$\begin{aligned} I(\tau, a) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{a,b}(\tau) \psi_{a,b}(t_0) db = \\ &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi\left(\frac{\tau-b}{a}\right) \overline{\psi\left(\frac{t_0-b}{a}\right)} db. \end{aligned} \quad (14)$$

Поскольку $\psi \in L_2(R)$, при фиксированных значениях $a \neq 0$, $\tau \in R$, $t_0 \in R$ к интегралу $\delta > 0$ можно применить равенство Парсеваля, т. е.

$$I(\cdot, a) = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}\left(\frac{\tau-\cdot}{a}\right) \overline{\hat{\psi}\left(\frac{t_0-\cdot}{a}\right)}(\theta) d\theta, \quad (15)$$

где ψ – преобразование Фурье ψ , определенное равенством

$$\hat{\psi}(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(s) e^{-2\pi i s \theta} ds, \quad (16)$$

для которого интегралы также понимаются в смысле главного значения.

Вычислив выражения для преобразования Фурье в (15), имеем:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}\left(\frac{\tau - \cdot}{a}\right)(\theta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi\left(\frac{\tau - b}{a}\right) e^{-2\pi i b \theta} db = \left[\begin{array}{l} \tau - b = ua \\ db = -adu \end{array} \right] = \\ &= \text{sign } a \cdot a \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(u) e^{-2\pi i \tau \theta} e^{2\pi i ua \theta} du = \\ &= \text{sign } a \cdot a e^{-2\pi i \tau \theta} \hat{\psi}(-a\theta); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\psi}\left(\frac{t_0 - \cdot}{a}\right)(\theta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi\left(\frac{t_0 - b}{a}\right) e^{-2\pi i b \theta} db = \left[\begin{array}{l} t_0 - b = ua \\ db = -adu \end{array} \right] = \\ &= \text{sign } a \cdot a \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(u) e^{-2\pi i t_0 \theta} e^{2\pi i ua \theta} du = \\ &= \text{sign } a \cdot a e^{-2\pi i t_0 \theta} \hat{\psi}(-a\theta), \end{aligned}$$

Следовательно,

$$I(\tau, a) = \int_{-\infty}^{+\infty} a^2 e^{2\pi i \theta(t_0 - \tau)} \frac{|\hat{\psi}(-a\theta)|^2}{|a|} d\theta. \quad (17)$$

Тогда, применив формулу Фубини к интегралу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I(\tau, a) \frac{da}{a^2}, \quad (18)$$

имеем

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{da}{a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} a^2 e^{2\pi i \theta(t_0 - \tau)} \frac{|\hat{\psi}(-a\theta)|^2}{|a|} d\theta = \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ A, B \rightarrow +\infty}} \int_{\varepsilon < |a| < A} \int_{\varepsilon < |\theta| < B} e^{2\pi i \theta(t_0 - \tau)} d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(-a\theta)|^2}{|a|} da = \\ &= \left[\begin{array}{l} -a\theta = v \\ da = -\frac{dv}{\theta} \end{array} \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \theta(t_0 - \tau)} \text{sign } \theta d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(v)|^2}{|v|} dv = \\ &= C_{\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \theta(t_0 - \tau)} \text{sign } \theta d\theta. \end{aligned}$$

Заметим, что в интегральном представлении (11) правая часть не зависит от выбора значений параметра $\xi \in R$. Следовательно, в этом представлении (и всюду далее) можно считать ξ фиксированным и равным любому заданному числу, отличному от нуля. Кроме того, интегралы по переменной θ следует понимать в смысле главного значения по Коши. Другими словами, сравнение интегралов (12), (13) сводится к сравнению пределов:

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t_0 + h) dh \int_{-A}^A e^{2\pi i \theta h} \text{sign } \theta d\theta; \quad (12')$$

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t_0) e^{2\pi i \xi h} dh \int_{-A}^A e^{2\pi i \theta h} \text{sign } \theta d\theta, \quad (13')$$

где $h = \tau - t_0$.

Внутренние интегралы в (12'), (13') равны

$$\begin{aligned} \int_{-A}^A e^{2\pi i \theta h} \text{sign } \theta d\theta &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{h} [2 - 2 \cos 2\pi A h] = \\ &= \frac{2}{\pi i h} \sin^2 \pi A h. \end{aligned}$$

Рассмотрим разность повторных интегралов в (12'), (13'):

$$\begin{aligned} J &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(t_0 + h) - x(t_0) e^{2\pi i \xi h}}{h} \frac{2}{\pi i} \sin^2 \pi A h dh = \\ &= \int_{|h| < \delta} \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h} \frac{2}{\pi i} \sin^2 \pi A h dh + \\ &\quad + \int_{|h| < \delta} \frac{[-2\pi i \xi \alpha(h)] \cdot 2}{\pi i} \sin^2 \pi A h dh + \\ &\quad + \int_{|h| > \delta} \frac{x(t_0 + h) - x(t_0) e^{2\pi i \xi h}}{h} \frac{2}{\pi i} \sin^2 \pi A h dh = J_1 + J_2 + J_3, \end{aligned}$$

где $\alpha(h) = O(1)$ при $h \rightarrow 0$ (т. е. $e^{2\pi i \xi h}$ представлена по формуле Тейлора). Для любых фиксированных $\delta > 0$, $A > 0$ при малых h функция $\varphi(h, A) = \frac{x(t_0 + h) - x(t_0) e^{2\pi i \xi h}}{h} \frac{2}{\pi i} \sin^2 \pi A h$ является абсолютно интегрируемой на $(-\infty, \delta] \cup [\delta, +\infty)$

абсолютно интегрируемой на $(-\infty, \delta] \cup [\delta, +\infty)$ в силу неравенства Коши – Буняковского – Шварца.

$$\begin{aligned} J_3 &= \int_{|h|>\delta} \frac{x(t_0+h)}{h} \frac{2}{\pi i} \sin^2 \pi A h d h - \\ &- \int_{|h|>\delta} \frac{x(t_0)e^{2\pi i \xi h}}{h} \frac{2}{\pi i} \sin^2 \pi A h d h = J_{31} + J_{32}; \\ J_{31} &= \int_{|h|>\delta} \frac{x(t_0+h)}{h} \frac{2}{\pi i} \sin^2 \pi A h d h \leq \\ &\leq \left(\int_{|h|>\delta} |x(t_0+h)|^2 d h \right)^{1/2} \left(\int_{|h|>\delta} \frac{d h}{h^2} \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

следовательно, $J_{31} \in L_2(R)$.

$$\begin{aligned} J_{32} &= \int_{|h|>\delta} \frac{x(t_0)e^{2\pi i \xi h}}{h} \frac{2}{\pi i} \sin^2 \pi A h d h = \\ &= \frac{2}{\pi i} \int_{|h|>\delta} \frac{x(t_0)}{h} \cos 2\pi i \xi h \sin^2 \pi A h d h + \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_{|h|>\delta} \frac{x(t_0)}{h} \sin 2\pi i \xi h \sin^2 \pi A h d h; \\ \frac{2}{\pi i} \int_{|h|>\delta} \frac{x(t_0)}{h} \cos 2\pi i \xi h \sin^2 \pi A h d h &= 0, \end{aligned}$$

так как подынтегральная функция является нечетной, а отрезок интегрирования – симметричным относительно начала координат.

$$\text{Рассмотрим } \frac{2}{\pi} \int_{\delta < |h| < B} \frac{x(t_0) \sin 2\pi i \xi h}{h} \sin^2 \pi A h d h.$$

Зафиксируем $B > \delta$, тогда, в силу леммы Римана – Лебега [4, с. 424], этот интеграл стремится

к нулю при $B \rightarrow +\infty$, а значит, равен нулю в смысле главного значения.

Отсюда $\lim_{A \rightarrow +\infty} J_3 = 0$ по лемме Римана – Лебега. Аналогичные рассуждения имеют место для J_2 , поскольку $\left| \frac{-2\pi i \xi \alpha(h)}{\pi i} 2 \sin \pi A h \right| \leq C$, $|h| < \delta$.

Наконец, существование предела

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{|h|<\delta} \frac{x(t_0+h) - x(t_0)}{h} \frac{2}{\pi i} \sin^2 \pi A h d h = 0$$

также вытекает из леммы Римана – Лебега и условия Дини (4).

Теорема доказана.

ВЫВОД

Таким образом, установлена поточечная сходимость интегрального вейвлет-преобразования в случае произвольного вейвлета ψ при условии, что функция x удовлетворяет условию Дини.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pinsky M. Introduction to Fourier Analysis and Wavelets. – Brooks/Cole, Pacific Grove, CA, 2002. – 376 p.
2. Чуи К. Введение в вейвлеты. – М.: Мир, 2001. – 412 с.
3. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. – М.: Ижевск: РХД, 2001. – 463 с.
4. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1981. – 543 с.