УДК 512.552

О НИЛЬАЛГЕБРАХ НАД БЕСКОНЕЧНЫМ ПОЛЕМ С РАЗРЕШИМОЙ ПРИСОЕДИНЕННОЙ ГРУППОЙ

Канд. физ.-мат. наук, доц. СМИРНОВ М. Б.

Белорусский национальный технический университет

В данной работе продолжается изучение взаимосвязей ассоциативных колец и их присоединенных групп [1–4]. В частности, исследуется задача о строении нильалгебр над бесконечным полем с разрешимой присоединенной группой. Для радикальных колец известен результат Дженнингса [4], который показал, что если присоединенная группа радикального кольца нильпотентна, то и само кольцо нильпотентно как кольцо Ли. В случае разрешимости присоединенной группы доказывается аналогичный результат для нильалгебр над бесконечным полем, а именно, если такая нильалгебра имеет разрешимую присоединенную группу, то она разрешима как алгебра Ли. Автору неизвестны примеры, чтобы это утверждение не имело места для нильалгебр над конечными полями.

Пусть A – нильалгебра над бесконечным полем F и A^* – ее присоединенная группа. Для упрощения записи присоединим к алгебре A формальную единицу 1 и будем писать $g = 1 + x \in A^*$, $x \in A$. Для $a, b \in A$ обозначим $[a, b] = ab - ba$ и $[a_1, a_2, \ldots, a_n] = [[\ldots[a_1, a_2], \ldots], a_n]$. Для любых подмножеств $X, Y \subset A$ через $<X>$ и $[X, Y]$ обозначаем F – модули, порожденные всеми элементами x и $[x, y]$, $x \in X$, $y \in Y$. Также полагаем, $X^{(1)} = X$, $X^{(k+1)} = [X^{(k)}, X^{(k)}]$ для $k \geq 1$. Для любой группы $G < A^*$ обозначаем $G^{(1)} = G$, $G^{(2)} = (G^{(1)}, G^{(1)})$ – ее коммутант и $G^{(k+1)} = (G^{(k)}, G^{(k)})$ для всех $k > 1$. Если $a_0, a_1 \in G$, $a_2 \in G^{(2)}$, …, $a_n \in G^{(n)}$, то полагаем $B_1 = <G>$, B_k – F – модуль, порожденный всеми элементами вида $b_k = a_{k-1}^{-1}[b_{k-1}, a_{k-1}]$ при $k > 1$. N обозначает множество натуральных чисел.

Т е о р е м а. *Пусть A – нильалгебра над бесконечным полем F и $G = A^*$ – ее присоединенная группа. Если группа G разрешима класса n, то алгебра A разрешима класса n как алгебра Ли.*

Доказательство. По условию $G^{(n+1)} = 1$. Поэтому, если

$$a_0,\ a_1 \in G,\ a_2 \in G^{(2)}, \ldots, a_n \in G^{(n)},$$

то

$$g_{n+1} = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) = 1. \tag{1}$$

Пусть $t \neq 0$ произвольный элемент поля F, $a_0^{-1} = 1 - tx \in G$, $x \in A$. Тогда существует $m \in N$ такое, что $x^m = 0$ и $a_0 = 1 + tx + t^2x^2 + \ldots + t^{m-1}x^{m-1}$. Поэтому

$$g_2 = (a_0, a_1) = a_0^{-1}a_1^{-1}a_0a_1 = (1 - tx)a_1^{-1}(1 + tx + t^2x^2 + \ldots + t^{m-1}x^{m-1})a_1 = 1 + ta_1^{-1}[x, a_1] + t^2c_{21} + t^3c_{22} + \ldots + t^mc_{2m-1} = 1 + tb_2 + t^2c_{21} + \ldots + t^mc_{2m-1} \in G^{(2)},$$

где $b_2 = a_1^{-1}[x, a_1]$ и $c_{2i} \in A$ – сумма членов с коэффициентом t^{i+1}. Аналогично,

$$g_2^{-1} = (a_1, a_0) = a_1^{-1}a_0^{-1}a_1a_0 = a_1^{-1}(1 - tx)a_1(1 + tx + t^2x^2 + \ldots + t^{m-1}x^{m-1}) = 1 - ta_1^{-1}[x, a_1] + t^2d_{21} + t^3d_{22} + \ldots + t^md_{2m-1} = 1 - tb_2 + t^2d_{21} + \ldots + t^md_{2m-1}.$$

Предположим, что для любого натурального $k > 2$ справедливо:

$$g_k = (a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}) = 1 + tb_k + t^2c_{k1} + \ldots + t^sc_{k\,s-1};$$

$$g_k^{-1} = 1 - tb_k + t^2 d_{k1} + ... + t^s d_{k\,s-1},$$

где $b_k = a_{k-1}^{-1}[b_{k-1}, a_{k-1}]$.

Тогда

$$g_{k+1} = g_k^{-1} a_k^{-1} g_k a_k = (1 - tb_k + t^2 d_{k1} + ... + t^s d_{k\,s-1}) a_k^{-1} \times$$

$$\times (1 + tb_k + t^2 c_{k1} + ... + t^s c_{k\,s-1}) a_k = 1 + t(a_k^{-1} b_k a_k - b_k) +$$

$$+ t^2 c_{k+1\,1} + ... + t^{2s} c_{k+1\,2s-1} = 1 + tb_{k+1} +$$

$$+ t^2 c_{k+1\,1} + ... + t^{2s} c_{k+1\,2s-1},$$

где $b_{k+1} = a_k^{-1}[b_k, a_k]$.

Аналогично находим

$$g_{k+1}^{-1} = a_k^{-1} g_k^{-1} a_k g_k = 1 - tb_{k+1} + t^2 d_{k+1\,1} + ... + t^{2s} d_{k+1\,2s-1}.$$

Таким образом по индукции мы имеем для любого $k \in N$:

$$g_{k+1}(t) = 1 + tb_{k+1} + t^2 c_{k+1\,1} + ... + t^s c_{k+1\,s-1} \in G^{(k+1)}; \quad (2)$$

$$g_{k+1}^{-1}(t) = 1 - tb_{k+1} + t^2 d_{k+1\,1} + ... + t^s d_{k+1\,s-1} \in G^{(k+1)}; \quad (3)$$

$$b_{k+1} = a_k^{-1}[b_k, a_k] \quad (4)$$

и $s = 2^k m$ зависит только от a_0 и k. Под b_1 подразумеваем любой элемент $x \in A$.

Поскольку соотношение (2) верно для любого $t \in F$, а поле F бесконечно, то, подставляя последовательно элементы $t_1, t_2, ..., t_s \in F$, $t_i \neq t_j$ при $i \neq j$ вместо t, получим систему линейных уравнений от s неизвестных $x_1 = b_{k+1}$, $x_2 = c_{k+1\,1}$, ..., $x_s = c_{k+1\,s-1}$ следующего вида:

$$\begin{cases} x_1 + t_1 x_2 + t_1^2 x_3 + ... + t_1^{s-1} x_s = t_1^{-1}(g_{k+1}(t_1) - 1) \in < G_0^{(k+1)} >; \\ x_1 + t_2 x_2 + t_2^2 x_3 + ... + t_2^{s-1} x_s \in < G_0^{(k+1)} >; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1 + t_s x_2 + t_s^2 x_3 + ... + t_s^{s-1} x_s \in < G_0^{(k+1)} >. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь $< G_0^{(k+1)} >$ обозначает подалгебру, порожденную элементами вида

$$g_{k+1} - 1 = g_k^{-1} a_k^{-1}[g_k, a_k]$$

(т. е. порожденную коммутаторами k+1-го порядка группы G без формальной единицы 1). Так как при различных t_i определитель системы (5) отличен от нуля, система имеет единственное решение вида $x_i \in < G_0^{(k+1)} >$, $i = 1, 2, ..., s$ и, в частности:

$$x_1 = b_{k+1} = a_k^{-1}[b_k, a_k] \in < G_0^{(k+1)} >. \quad (6)$$

Отметим, что при $k = n$ ввиду (1) получаем $< G_0^{(n+1)} > = < 0 >$, система (5) – однородная и $x_1 = b_{n+1} = a_n^{-1}[b_n, a_n] = 0$. Для любого натурального $l > 1$ обозначим через B_l подалгебру, порожденную всеми элементами вида

$$b_l = a_{l-1}^{-1}[b_{l-1}, a_{l-1}], \; B_1 = <G>.$$

Тогда из (6) сразу получаем

$$B_l \subset < G_0^{(l)} >. \quad (7)$$

Поскольку для любых $x \in A$ и $a_1 \in G$ $[x, a_1] = a_1^{-1}[a_1 x, a_1] \in B_2$, то

$$[A, G] = [A, A] = A^{(2)} \subset B_2. \quad (8)$$

Так как в (6)

$$b_{k+1} = a_k^{-1}[a_{k-1}^{-1}[...[a_2^{-1}[a_1^{-1}[x, a_1], a_2], ...], a_{k-1}], a_k],$$

то b_k не зависит от a_k.

Пусть в (6) $a_k = (h_0, h_1, h_2, ..., h_{k-1}) \in G^{(k)}$, где $h_0, h_1 \in G$, $h_2 \in G^{(2)}$, ..., $h_{k-1} \in G^{(k-1)}$ – независимые элементы. Тогда, полагая $h_0^{-1} = 1 - ty$, где $y \in A$, $t \in F$, имеем $h_0 = 1 + ty + t^2 y^2 + ... + t^{l-1} y^{l-1}$ для некоторого $l \in N$ и ввиду (2)–(4) получаем:

$$a_k(t) = 1 + tb_k' + t^2 c_{k1} + ... + t^r c_{k\,r-1};$$

$$a_k^{-1}(t) = 1 - tb_k' + t^2 d_{k1} + ... + t^r d_{k\,r-1};$$

$$b_k' = h_{k-1}^{-1}[b_{k-1}, h_{k-1}].$$

Подставляя $a_k(t)$ и $a_k^{-1}(t)$ в (6), получаем

$$b_{k+1} = (1 - tb'_k + t^2 d_{k1} + \ldots + t^r d_{k\,r-1})[b_k,\, 1 + $$
$$+ tb'_k + t^2 c_{k\,1} + \ldots + t^r c_{k\,r-1}] =$$
$$= t[b_k,\, b'_k] + t^2 x_{k+1\,1} + \ldots + t^{2r} x_{k+1\,2r-1} \in B_{k+1}.$$

Поскольку это соотношение верно при любых $t \in F$, то повторяя процедуру, описанную выше, т. е. переходя к системе вида (5), получим $[b_k, b'_k] \in B_{k+1}$, и так как b_k и b'_k независимы, то

$$[B_k,\, B_k] = B_k^{(2)} \subset B_{k+1}\,. \qquad (9)$$

Так как (9) верно для любых натуральных $k > 1$, то с учетом (1), (7), (8) получим

$$<0> = <G_0^{(n+1)}> \supseteq B_{n+1} \supseteq B_n^{(2)} \supseteq B_{n-1}^{(3)} \supseteq$$
$$\supseteq \ldots \supseteq B_2^{(n)} \supseteq (A^{(2)})^{(n)} = A^{(n+1)},$$

что доказывает теорему.

С л е д с т в и е. *Если char $F \neq 2$, то разрешимая класса n присоединенная группа A^* нильалгебры A над бесконечным полем F имеет нильпотентный нормальный делитель H такой, что факторгруппа A^*/H разрешима класса не выше 8.*

Доказательство. Из теоремы следует разрешимость алгебры A. Поэтому осталось применить результаты [1, 2].

Отметим, что ограничение на характеристику поля вызвано аналогичным ограничением в [2] и не ясно, является ли оно существенным для нильалгебр. Весьма вероятным кажется предположение, что нильалгебра над полем характеристики 2, разрешимая как алгебра Ли, имеет разрешимую присоединенную группу. Для нильалгебр экспоненты 4 это доказано в [3].

ВЫВОД

Нильалгебра над бесконечным полем с разрешимой присоединенной группой разрешима как алгебра Ли того же класса.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Залесский А. Е., Смирнов М. Б.** Ассоциативные кольца, удовлетворяющие тождеству лиевой разрешимости // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1982. – № 2. – С. 15–20.
2. **Смирнов М. Б.** О группе единиц ассоциативного кольца, удовлетворяющего тождеству лиевой разрешимости // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1983. – № 5. – С. 20–23.
3. **Смирнов М. Б.** Присоединенные группы нильалгебр экспоненты 4 над полем характеристики 2 // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1988. – № 5. – С. 8–13.
4. **Jennings S. A.** Radical Rings with Nilpotent Associated Groups // Trans. Royal Soc. Can., 1955. – V. XLIX, ser. III. – P. 31–38.

УДК 517.9

ПОТОЧЕЧНАЯ СХОДИМОСТЬ ОБРАТНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В УСЛОВИЯХ ДИНИ*

ДУБРОВИНА О. В.

Белорусский национальный технический университет

Существование обратного вейвлет-преобразования в смысле сходимости в пространстве $L_2(R)$ установлена различными способами [1, с. 287]. Что касается поточечной сходимости, то в большинстве монографий и статей, посвященных интегральным вейвлет-преобразованиям, приводятся, как правило, доказательства, полученные при дополнительных условиях на базовый вейвлет ψ [1–3]. Установленное ниже утверждение является аналогом соответ-

* Работа выполнена при частичной поддержке Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь.