

УДК 624.04

К ТЕОРИИ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛОК ИЗ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОГО МАТЕРИАЛА

Докт. техн. наук, проф. БОСАКОВ С. В., инж. ЦЕТЬКО Н. С.

Белорусский национальный технический университет,
Белорусский научно-исследовательский институт строительства

Проектные организации Республики Беларусь несколько лет назад перешли на отечественные нормы проектирования бетонных и железобетонных конструкций, в которых заложены нелинейные зависимости между напряжениями и деформациями для решения статических задач расчета конструкций [1]. В настоящей статье делается попытка исследования влияния нелинейно упругих законов деформирования материала на свободные колебания балок. Эта область исследования, несомненно, представляет большой интерес, так как расчеты на сейсмике, пульсацию ветра и влияние машин с динамическими нагрузками прямо связаны с определением частот и форм собственных колебаний конструкций [2].

1. Рассмотрим консольную балку с одной степенью свободы (рис. 1).

Предположим, что материал двутаврового сечения балки подчиняется закону

$$\sigma(\varepsilon) = E\varepsilon - \frac{4}{27} \frac{E^3}{\sigma^2} \varepsilon^3, \quad (1)$$

где σ , E – предел прочности и начальный модуль упругости материала балки.

Зададимся законом свободных колебаний балки в виде

$$Z(x, t) = A(t) \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L} \right). \quad (2)$$

Считая справедливой гипотезу плоских сечений, находим

$$\varepsilon = \frac{z}{R} = A(t) \frac{\pi^2 z}{4L^2} \cos \frac{\pi x}{2L}, \quad (3)$$

где $\frac{1}{R}$ – кривизна балки.

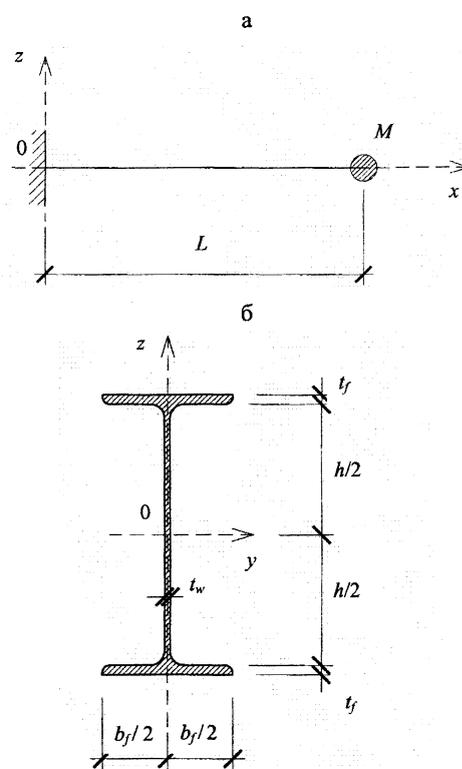


Рис. 1. а – консольная балка с сосредоточенной массой; б – ее поперечное сечение

Энергия изгиба при принятом законе деформирования (1) получится в виде [3]

$$U = \int_0^L dx \iint_{\Omega} \left(E \frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{1}{27} \frac{E^3}{\sigma^2} \varepsilon^4 \right) d\Omega =$$

$$= \frac{E\pi^4}{768L^3} (6b_f h^2 t_f + 8b_f t_f^3 + h_w^3) A^2(t) -$$

$$- \frac{E^3 \pi^8}{1474560 L^7 \sigma^2} [2t_f (5h^4 t_f + 40h^2 t_f^3 + 16t_f^5) + h^5 t_w], \quad (4)$$

где Ω – площадь двутаврового сечения.

Согласно теореме Кастилиано $\frac{\partial U}{\partial A}$ даст нелинейную силу упругости балки в точке приложения массы [4], и поэтому на основании принципа Даламбера [5] для двутавра 30Б2 и $L = 3$ м; $\sigma = 4 \cdot 10^8$ Па; $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па; $M = 500$ кг получаем нелинейное дифференциальное уравнение

$$500 \frac{d^2 A(t)}{dt^2} + 1,57559 \cdot 10^6 A(t) - 6,08857 \cdot 10^7 A^3(t) = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) известно под названием уравнения Дюффинга с мягкой нелинейностью [5] и допускает точное решение. Действительно, обозначим $\frac{dA(t)}{dt} = v$, тогда $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dA} \frac{dA}{dt} = v \frac{dv}{dA}$ и

$$v \frac{dv}{dA} = -\frac{1}{500} \cdot (1,57559 \cdot 10^6 A - 6,08857 \cdot 10^7 A^3) = -(3151,18A - 121771A^3).$$

Или

$$v dv = -(3151,18A - 121771A^3) dA.$$

Откуда после интегрирования получаем

$$\frac{v^2}{2} = H - \frac{3151,18}{2} A^2 + \frac{121771}{4} A^4, \quad (6)$$

где H – постоянная интегрирования.

Если обе части (6) умножить на величину массы M , то произведение MH будет давать полную энергию колеблющейся системы, состоящей из кинетической энергии массы $\frac{Mv^2}{2}$ и потенциальной энергии изгиба балки U . Очевидно, в процессе свободных колебаний балки ее полная энергия остается постоянной.

Используя начальные условия:

$$A(t)|_{t=0} = A_0; \quad \left. \frac{dA(t)}{dt} \right|_{t=0} = v_0,$$

находим выражение для полной энергии

$$MH = M \frac{v_0^2}{2} + \frac{3151,18}{2} A_0^2 - \frac{121771}{4} A_0^4. \quad (7)$$

Так как из (6) следует

$$v = \sqrt{2H - 3151,18A^2 + \frac{121771}{2} A^4} = \sqrt{\frac{2MH}{M} - 3151,18A^2 + \frac{121771}{2} A^4} = \frac{dA}{dt},$$

получаем

$$t = \int_{A_0}^A \frac{dA}{\sqrt{\frac{2MH}{M} - 3151,18A^2 + \frac{121771}{2} A^4}}. \quad (8)$$

Для периода T собственных колебаний рассматриваемой балки из (8) находим

$$T = 4 \int_{A_0}^0 \frac{dA}{\sqrt{\frac{2MH}{M} - 3151,18A^2 + \frac{121771}{2} A^4}}, \quad (9)$$

откуда видны зависимость периода колебаний от начальных условий и негармоничность периодических колебаний балки, так как (9) выражается через полные эллиптические интегралы [6].

На рис. 2 приведены графики колебаний для линейного и нелинейного вариантов при $A_0 = 0,03$ м и $v_0 = 0$, построенные с помощью пакета «Mathematika».

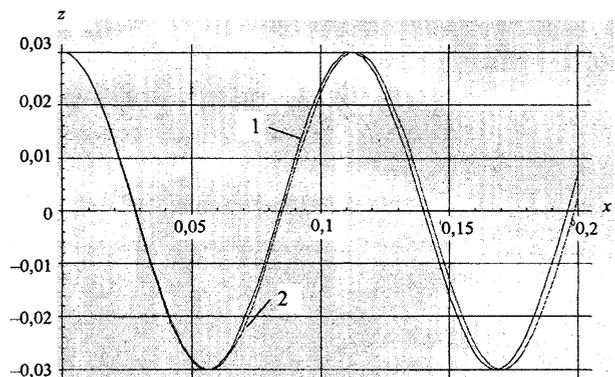


Рис. 2. Графики колебаний консольной балки с одной степенью свободы при: 1 – линейном; 2 – нелинейном законах деформирования

2. Рассмотрим прежнюю консольную балку, но прямоугольного поперечного сечения размером bh , материал который подчиняется закону деформирования

$$\sigma(\varepsilon) = R_b \left[\pm 1 \mp \exp\left(\frac{E_b}{R_b} |\varepsilon|\right) \right], \quad (10)$$

где R_b, E_b – прочность и начальный модуль упругости материала балки.

Задаваясь уравнением свободных колебаний в виде (2), после определения кривизны (3) вычислим энергию изгиба по формуле (4):

$$U = 2R_b \int_0^L dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \left[\frac{R_b}{E_b} \exp\left(-\frac{E_b A \pi^2 z}{4R_b L^2} \cos \frac{\pi x}{2L}\right) + \frac{A \pi^2}{4L^2} z \cos \frac{\pi x}{2L} \right] dz = A \frac{\pi b h^2 R_b}{8L} + \frac{2L 8b L^2 R_b^3}{12 \pi A \pi^2 E_b^2} \left[6 \pi \alpha I_0(\alpha) - \pi \alpha^3 F_2\left(\frac{3}{2}; 2, \frac{5}{2}; \frac{\alpha^2}{4}\right) - 2 \alpha^2 F_3\left(1; \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}; \frac{\alpha^2}{4}\right) - 6 \pi L_1(\alpha) \right]; \quad (11)$$

$$\alpha = \frac{E_b h \pi^2}{8 R_b L^2} A,$$

где $I_0(\alpha)$ – функция Бесселя мнимого аргумента; ${}_p F_q(\alpha; \beta; \gamma; z)$ – гипергеометрические функции; $L_1(\alpha)$ – функция Струве [6].

Разлагая (11) в степенной ряд по безразмерному параметру α и дифференцируя по A для определения нелинейной силы упругости, получаем нелинейное дифференциальное уравнение для исходных данных железобетонной балки ($L = 3$ м; $M = 500$ кг; $E_b = 3,31 \cdot 10^{10}$ Па; $R_b = 3,49 \cdot 10^7$ Па; $b = 0,2$ м; $h = 0,4$ м)

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + 7961,088A - 131781A^2 + 1,61471 \cdot 10^6 A^3 - 1,58391 \cdot 10^7 A^4 + 1,29961 \cdot 10^8 A^5 - \dots = 0. \quad (12)$$

Численное решение уравнения (12) получено на пакете «Mathematika» при удержании в степенном ряду пяти первых членов. На рис. 3 приведены графики колебаний консольной балки для линейного и нелинейного вариантов. Для нелинейного варианта видно смещение оси колебаний относительно центра прямоугольного сечения.

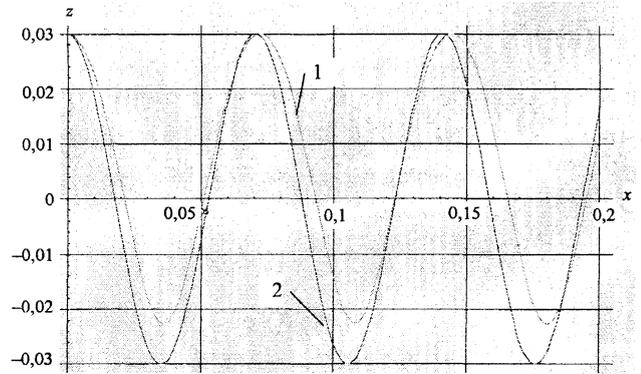


Рис. 3. Графики свободных колебаний железобетонной балки свободы при: 1 – нелинейном; 2 – линейном законах деформирования

3. Теперь изучим поведение консольной балки с двумя степенями свободы (рис. 4).

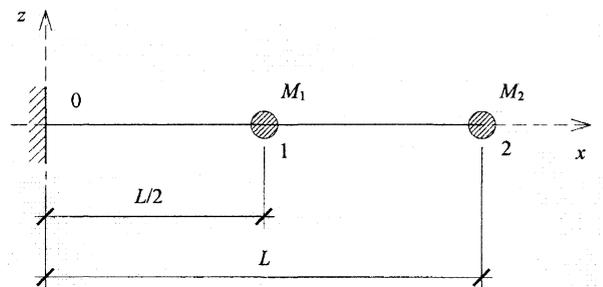


Рис. 4. Консольная балка с двумя степенями свободы

Зададимся законом колебаний в форме

$$z(x, t) = A_1(t) \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L}\right) + A_3(t) \left(1 - \cos \frac{3\pi x}{2L}\right). \quad (13)$$

Причем

$$z_1\left(\frac{L}{2}, t\right) = A_1(t) \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + A_3(t) \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \quad (14)$$

$$z_2(L, t) = A_1(t) + A_3(t).$$

Откуда следует:

$$A_1(t) = -\sqrt{\frac{2}{2}} z_1\left(\frac{L}{2}, t\right) + \frac{1 + \sqrt{2}}{2} z_2(L, t); \quad (15)$$

$$A_3(t) = -\sqrt{\frac{2}{2}} z_1\left(\frac{L}{2}, t\right) + \frac{2 - \sqrt{2}}{2} z_2(L, t).$$

Законы движения колеблющихся масс можно записать в виде уравнений:

$$\begin{cases} M_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} + R_1 = 0; \\ M_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2} + R_2 = 0, \end{cases} \quad (16)$$

где R_1, R_2 – силы упругости балок в местах приложения масс на балке.

На основании (15) можно получить:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{\partial U}{\partial z_1} = \frac{\partial U}{\partial A_1} \frac{\partial A_1}{\partial z_1} + \frac{\partial U}{\partial A_3} \frac{\partial A_3}{\partial z_1} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial U}{\partial A_1} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial U}{\partial A_3}; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{\partial U}{\partial z_2} = \frac{\partial U}{\partial A_1} \frac{\partial A_1}{\partial z_2} + \frac{\partial U}{\partial A_3} \frac{\partial A_3}{\partial z_2} = \\ &= \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \frac{\partial U}{\partial A_1} + \frac{\sqrt{2} - 2}{2\sqrt{2}} \frac{\partial U}{\partial A_3}, \end{aligned}$$

где U – энергия изгиба колеблющейся балки.

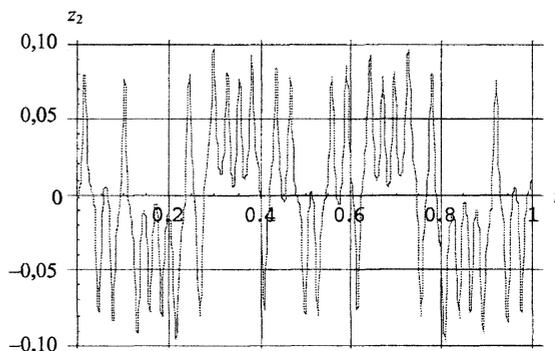
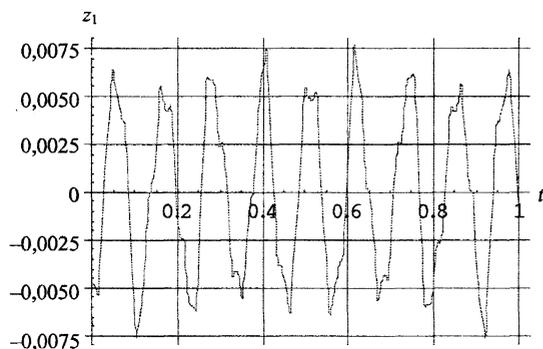


Рис. 5. Графики колебаний точек расположения масс на консольной балке

4. Рассмотрим свободные колебания шарнирно опертой железобетонной балки прямоугольного поперечного сечения с бесконечным числом степеней свободы (рис. 6).

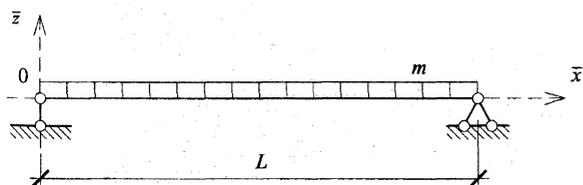


Рис. 6. Шарнирно опертая балка с бесконечно большим числом степеней свободы

Дифференциальное уравнение ее свободных колебаний запишем в следующем виде:

$$\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} \left[B(\bar{x}, \bar{t}) \frac{d^2 \bar{z}}{d \bar{x}^2} \right] + m \frac{d^2 \bar{z}}{d \bar{t}^2} = 0, \quad (19)$$

Выразим эту энергию в виде функции от A_1, A_3 приняв закон деформирования материала балки в виде (1). По формулам (17) для двутавра 30Б2 и $L = 3$ м, $M_1 = 1500$ кг, $M_2 = 500$ кг. Получим необходимые силы упругости:

$$\begin{aligned} R_1 &= A_1(t) \left[1,575592 \cdot 10^6 - 6,088566 \cdot 10^7 A_1^2(t) - \right. \\ &\quad \left. - 5,479709 \cdot 10^8 A_1(t) A_3(t) - 9,863476 \cdot 10^9 A_3^2(t) \right]; \\ R_2 &= 1,276229 \cdot 10^8 A_3(t) - 1,826569 A_3(t) \cdot 10^8 - \\ &\quad - 9,863476 \cdot 10^9 A_1^2(t) A_3(t) - 3,994708 \cdot 10^{11} A_3^3(t). \end{aligned} \quad (18)$$

Численное решение получено с помощью пакета «Mathematika». На рис. 5. приведены графики колебаний точек расположения масс при начальных условиях $A_1(0) = 0,001$ м; $A_3(0) = -0,01$ м; $A'(0) = A'_3(0) = 0$.

где $B(\bar{x}, \bar{t})$ – изгибная жесткость сечения балки.

Для фиксированного момента времени \bar{t} прямоугольного сечения балки и при условии (1):

$$\begin{aligned} B &= b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(\bar{z}) \bar{z}^2 d\bar{z} = B_0 \left[1 - \frac{h^2}{15} \left(\frac{d^2 \bar{z}}{d \bar{x}^2} \right)^2 \right]; \\ B_0 &= \frac{Ebh^3}{12}. \end{aligned} \quad (20)$$

Поэтому уравнение свободных колебаний (19) принимает вид

$$\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} \left\{ B_0 \left[1 - \frac{h^2}{15} \left(\frac{E}{\sigma} \frac{d^2 \bar{z}}{d \bar{x}^2} \right)^2 \right] \frac{d^2 \bar{z}}{d \bar{x}^2} \right\} + m \frac{d^2 \bar{z}}{d \bar{t}^2} = 0. \quad (21)$$

Согласно [5] уравнение (21) приведем к безразмерной форме. Обозначим:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= xL; & \omega_0 \bar{t} &= t; & \bar{z} &= hz; \\ \frac{\partial}{\partial \bar{t}} &= \omega_0 \frac{\partial}{\partial t}; & \frac{\partial}{\partial \bar{x}} &= \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned} \quad (22)$$

После подстановки (22) в (21) получаем уравнение свободных колебаний в безразмерном виде

$$\omega_0^2 \frac{mL^4}{B_0} \frac{\partial^2 z}{\partial \bar{t}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} \left\{ \left[1 - \frac{h^4 E^2}{15L^4 \sigma^2} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \bar{x}^2} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 z}{\partial \bar{x}^2} \right\} = 0. \quad (23)$$

Численное решение уравнения (23) получено с помощью пакета «Mathematika». На рис. 7, 8 показаны первые две формы собственных колебаний для начальных условий:

$$\bar{z}_1(\bar{x}, 0) = 0,01 \sin \frac{\pi \bar{x}}{L};$$

$$\frac{\partial \bar{z}_1(\bar{x}, 0)}{\partial \bar{t}} = 0;$$

$$u \bar{z}_2(\bar{x}, 0) = 0,001 \sin \frac{2\pi \bar{x}}{L};$$

$$\frac{\partial \bar{z}_2(\bar{x}, 0)}{\partial \bar{t}} = 0$$

при $b = 0,3$ м; $h = 0,5$ м; $E = 3,31 \cdot 10^{10}$ Па; $\sigma = 2,23 \cdot 10^7$ Па; $m = 1000$ кг/м; $L = 6$ м.

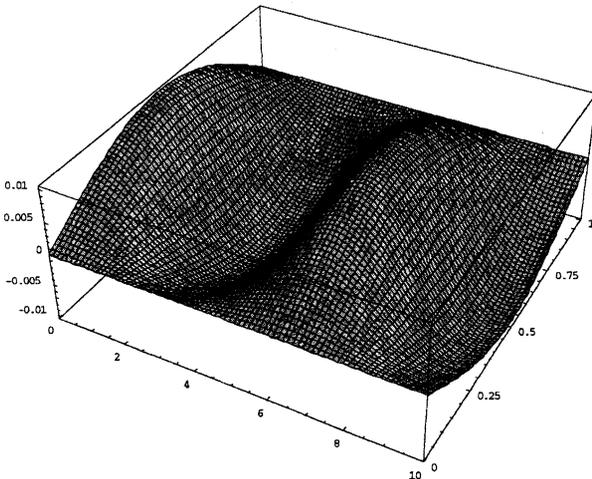


Рис. 7. Первая симметричная форма колебаний шарнирно опертой балки $T = 0,0775$ с

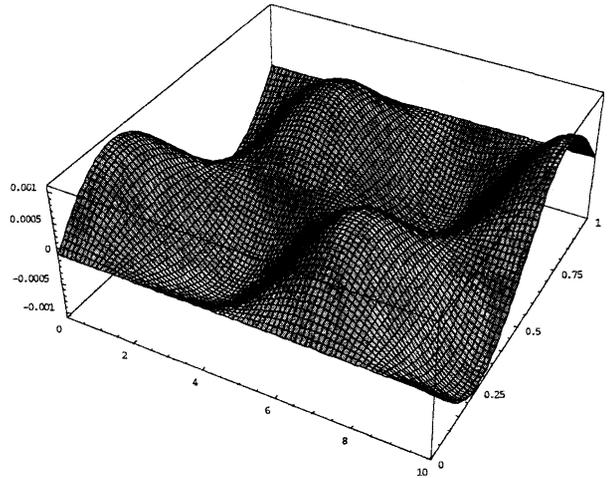


Рис. 8. Первая антисимметричная форма колебаний шарнирно опертой балки $T = 0,00199$ с

ВЫВОДЫ

1. Учет нелинейной связи между деформациями и напряжениями при свободных колебаниях балок значительно усложняет задачу определения частот и форм свободных колебаний балок.

2. Различные зависимости $\sigma - \varepsilon$ по-разному влияют на характер частоты и формы свободных колебаний балок.

3. Перед учеными Беларуси в области строительства стоят актуальные и сложные задачи по приведению в соответствие статических и динамических расчетов, заложенных в нормативных документах.

ЛИТЕРАТУРА

1. СНБ 5.03.01–02. Бетонные и железобетонные конструкции. – Мн., 2003. – 139 с.
2. СНиП 2.01.07–85. Нагрузки и воздействия. – М., 1986. – 34 с.
3. Босаков С. В. Метод Ритца в примерах и задачах по строительной механике и теории упругости. – Мн., 2000. – 144 с.
4. Ржаницын А. Р. Строительная механика. – М.: Высш. шк., 1991. – 438 с.
5. Найфэ А. Методы возмущений. – М.: Мир, 1976. – 455 с.
6. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды: Дополнительные главы. – М.: Наука, 1986. – 799 с.