

ОБЩИЕ ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В АНАЛИТИЧЕСКИХ МНОГОМЕРНЫХ ФУНКЦИЯХ МАТРИЧНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Канд. физ.-мат. наук, доц. НИФАГИН В. А., асп. СЕВРУК А. Б.

Белорусский национальный технический университет

Широко применяемая методика решения плоских задач линейной теории упругости, базирующаяся на физически ясно интерпретируемых представлениях компонент вектора перемещений и тензора напряжений через аналитические функции комплексной переменной и их производные [1–3], позволяет построить эффективный математический аппарат для нахождения замкнутых решений основных краевых задач, включая смешанные задачи. Дальнейшее развитие этот аппарат получил в теории интегралов типа Коши и сингулярных интегральных уравнений, которые использовались для решения многих важных в теоретическом и прикладном аспектах задач [4, 5]. Сочетание этих подходов с различными вариантами метода возмущений [6, 7] дало возможность распространить указанную методологию на краевые задачи механики упругих сред с нелинейными законами деформирования, а также упругопластические задачи.

В то же время попытки найти аналитические решения (точные и приближенные) пространственных задач теории упругости [8–10] не получили дальнейшего развития, что, на наш взгляд, объясняется недостаточной проработанностью методов теории функций многих комплексных переменных для решения конкретных задач. В [11, 12] построен компактизирующий изоморфизм между евклидовым пространством E_3 и комплексным пространством S^2 , введена новая структура матричной комплексной переменной Гамильтона – Кели, пространственные аналитические функции этой

переменной (так называемые многомерные комплексные потенциалы), а также дифференциальные операторы в S^2 . В данной работе получены общие решения основных трехмерных задач физически нелинейной теории упругости в представлениях матричных комплексных потенциалов матричной переменной, которые используются для формулировки краевых задач в перемещениях и напряжениях.

Рассмотрим элемент пространства S^2 в виде комплексной матрицы

$$A = \sum_{p=1}^4 a_p e_p = D_{\kappa}^{(2)}(a_p) = \begin{pmatrix} a_1 + ia_2 & a_3 + ia_4 \\ -a_3 + ia_4 & a_1 - ia_2 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Сопряжение введем по формуле

$$\bar{A} = \sum_{p=1}^4 a_p \bar{e}_p = \bar{D}_{\kappa}^{(2)}(a_p) = D_{\kappa}^{(2)}(a_1, -a_2, -a_3, -a_4), \quad (2)$$

где a_p – скаляры пространства E_n ($n = 2, 3, 4$); e_p – матрицы Гамильтона – Кели; $\bar{e}_p$ – комплексно-сопряженные матрицы. Таким же образом получим $\kappa = D_{\kappa}^{(2)}(x_p)$ – независимую матричную переменную Гамильтона; $f(\kappa) = D_{\kappa}^{(2)}(f_q(x_p))$, $p, q = \overline{1, n}$ – матричную функ-

цию переменной Гамильтона; $n \frac{\partial}{\partial \bar{\kappa}} = D_{\kappa}^{(2)} \left(\frac{\partial}{\partial x_p} \right)$ –

оператор матричной производной и комплексные матричные образы дифференциальных

операторов; $\nabla = D_{\kappa}^{(2)} \left(\frac{\partial}{\partial x_p} \right)$ – матричный ком-

плексный оператор Гамильтона; $\Delta_{\kappa\bar{\kappa}} = \frac{\partial^2}{\partial \kappa \partial \bar{\kappa}}$ –

матричный комплексный оператор Лапласа;

$\Delta_{\kappa\kappa}^2 = \frac{\partial^4}{\partial \kappa^2 \partial \bar{\kappa}^2}$ – матричный комплексный би-

гармонический оператор; $\text{div}(\cdot) = \frac{3}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \kappa}(\cdot) + (\cdot) \frac{\partial}{\partial \bar{\kappa}} \right)$ –

матричный комплексный оператор дивергенции.

Отметим, что в силу некоммутативности операции матричного умножения для функций и операторов из (1) следует, что $\overline{AB} = \bar{B} \bar{A}$. Всего можно сформировать восемь различных произведений, однако их количество сокращается за счет операции сопряжения (2). В силу указанного различаются дифференцированные слева и справа:

$$\frac{\partial}{\partial \kappa} f(\kappa) = \left(\frac{\partial f(\kappa)}{\partial \kappa} \right)^-; \quad f(\kappa) \frac{\partial}{\partial \kappa} = \left(\frac{\partial f}{\partial \kappa} \right)^+.$$

В то же время далее за основу примем левые производные

$$\frac{\partial}{\partial \kappa} f(\kappa); \quad \frac{\partial}{\partial \bar{\kappa}} f(\kappa); \quad \frac{\partial}{\partial \kappa} \bar{f}(\bar{\kappa}); \quad \frac{\partial}{\partial \bar{\kappa}} \bar{f}(\bar{\kappa}),$$

учитывая, что $\frac{\partial}{\partial \bar{\kappa}} \bar{f}(\bar{\kappa}) = f(\kappa) \frac{\partial}{\partial \kappa}$.

Кроме того, структура матричной переменной, функции и оператора в C^2 выбирается так, что круговым перестановкам индексов координат $\rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow$ в E_4 соответствуют круговые перестановки элементов $\rightarrow \kappa_1 \rightarrow \rightarrow \kappa_2 \rightarrow \kappa_3 \rightarrow \kappa_4 \rightarrow$ в C^2 , где $\kappa_p = D_{\kappa}^{(2)}(x_p, x_{p+1}, x_{p+2}, x_{p+3})$, $p, p+m = \overline{1,4}$. Отсюда вытекает, что круговым перестановкам при вырождении ${}^0\kappa_1 = D_{\kappa}^{(2)}(x_1, x_2, x_3, 0) \rightarrow {}^0\kappa_1 \rightarrow {}^0\kappa_2 \rightarrow {}^0\kappa_3 \rightarrow {}^0\kappa_4 \rightarrow$ в C^2 соответствуют круговые перестановки координат $\rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow 0 \rightarrow$ в пространстве E_3 . Для того чтобы упорядочить последовательности аргументов и функций, примем обозначения

$$f_p(\kappa_p) = D_{\kappa}^{(2)}(f_p(\kappa_p), f_{p+1}(\kappa_p), f_{p+2}(\kappa_p), f_{p+3}(\kappa_p)). \quad (3)$$

Транслируя известные условия сопряжения гармонических функций – условия Моисила – Теодореску [13] из областей действительного пространства E_3 в C^2 , получим условие

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\kappa}} f(\kappa) = 0, \quad (4)$$

которое принимается за условие аналитичности функции $f(\kappa)$ в $G \subset C^2$. Тогда аналитическую в области G функцию будем называть многомерным C^2 -потенциалом. Для получения общих решений основных пространственных задач физически нелинейной теории упругости обобщим эти уравнения на случай E_4 . В векторной записи с учетом расслоения базиса $e_p^{\pm}$, $p = \overline{1,4}$ для смещений $u_i (i = \overline{1,4})$ уравнения Навье запишутся в тензорной форме

$$u_{i,jj} + \frac{1}{1-2\nu} \varepsilon_{,i} = 0, \quad i, j = \overline{1,4}. \quad (5)$$

Тензор деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \text{def } \vec{u} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j = \overline{1,4}. \quad (6)$$

Уравнения совместности деформаций Сен-Венана

$$\Delta I_1(\varepsilon_{ij}) = 0, \quad i, j = \overline{1,4}, \quad (7)$$

где $\Delta I_1(\varepsilon_{ij})$ – первый инвариант тензора деформаций.

Аналогично можно записать пару систем уравнений в напряжениях – уравнения равновесия Коши и совместности Бельтрами. Связь между основными уравнениями задач теории упругости осуществляется с помощью закона Гука. Следуя гипотезе о существовании упругого потенциала [14], примем закон связи между напряжениями и деформациями:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ii} &= \frac{1}{3K} k(\sigma_0) \sigma + \frac{1}{2G} g(T_0^2) S_{ii}; \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{G} g(T_0^2) \sigma_{ij}, \quad i, j = \overline{1,4}, \end{aligned} \quad (8)$$

где ε_{ij} – тензор деформаций; σ – шаровой тензор; S_{ii} – девиатор напряжений; $k(\sigma_0)$ – функция среднего напряжения σ_0 ; $g(T_0^2)$ – функция интенсивности касательных напряжений T_0 , характеризующая отклонение от закона Гука; K, G – модуль объемного сжатия и модуль сдвига.

Таким образом, оставаясь в рамках малых деформаций (6), для ряда материалов наблюдается нелинейный характер диаграммы зависимости между деформациями и напряжениями (8), так называемая физическая нелинейность. При этом для большинства сред соблюдается пропорциональность между средним напряжением σ_0 и средним удлинением ε_0 . Поэтому функцию среднего напряжения можно положить $k(\sigma_0) \equiv 1$. Разлагая функцию интенсивности касательных напряжений в ряд по четным степеням T_0 и ограничиваясь для определенности первыми двумя членами ряда, получим квадратичный закон упругости (8) при

$$g(T_0^2) = 1 + g_2 T_0^2. \quad (9)$$

Здесь постоянная g_2 , характеризующая физическую нелинейность материала, определяется экспериментально. Решение пространственной статической задачи физически нелинейной теории упругости заключается в совместном интегрировании уравнений равновесия (5) и совместности деформаций (7) при соответствующем законе упругости (8).

Применим к соотношениям (5)–(9) приближенный аналитический метод решения, который, следуя [6], назовем методом разложения по параметру нагружения.

Введем малый безразмерный параметр $\lambda = \frac{q}{G} < 1$, где q – интенсивность внешнего сжимающего усилия. Будем искать решение сформулированной выше задачи в виде рядов по положительным степеням параметра λ :

$$u_j = \sum_{n \geq 0} u_j^{(n)} \lambda^n; \quad \varepsilon_{ij} = \sum_{n \geq 0} \varepsilon_{ij}^{(n)} \lambda^n; \quad \sigma_{ij} = \sum_{n \geq 0} \sigma_{ij}^{(n)} \lambda^n. \quad (10)$$

Тогда уравнения равновесия в произвольном приближении будут с учетом круговой перестановки $\rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow$

$$\frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon^{(n+1)}}{\partial x_1} - \frac{d \omega_3^{(n+1)}}{d x_2} + \frac{d \omega_2^{(n+1)}}{d x_3} + \frac{K_1^{(n+1)}}{2G} = -F_1^{(n-1)}, \quad (11)$$

где $K_j^{(n+1)}$ – компоненты вектора объемных сил $\vec{K}^{(n+1)}$; $F_j^{(n-1)}$ – составляющие фиктивных объемных сил $\vec{F}^{(n+1)}$ ($j = 1, 2, 3$);

$$F_1^{(n-1)} = \frac{\partial \eta_{11}^{(n-1)}}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial \eta_{12}^{(n-1)}}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial \eta_{13}^{(n-1)}}{\partial x_3}, \quad (12)$$

$$F_1^{(0)} = 0, \quad K_l^{(l)} = 0, \quad l > 2.$$

Здесь

$$\eta_{ij}^{(n-1)} = -g_2 \left(\psi_0^{(n-1)} \right)^2 \left(\varepsilon_{ij}^{(n-1)} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon^{(n-1)} \right); \quad (13)$$

$$\left(\psi_0^{(n-1)} \right)^2 = \frac{4}{3} \left(\frac{2}{3} \left(\varepsilon_{11}^{(n-1)^2} + \varepsilon_{22}^{(n-1)^2} + \varepsilon_{33}^{(n-1)^2} - \varepsilon_{11}^{(n-1)} \varepsilon_{22}^{(n-1)} - \varepsilon_{11}^{(n-1)} \varepsilon_{33}^{(n-1)} - \varepsilon_{22}^{(n-1)} \varepsilon_{33}^{(n-1)} \right) + \frac{1}{2} \left(\varepsilon_{12}^{(n-1)^2} + \varepsilon_{13}^{(n-1)^2} + \varepsilon_{23}^{(n-1)^2} \right) \right). \quad (14)$$

Итак, правые части (11) на каждом этапе являются известными функциями, вполне определенными на предыдущих шагах. Таким образом, напряженно-деформированное состояние при $n \geq 0$ представляет сумму

$$u_j^{(n)} = u_j^{(0)} + u_j^{*(n)}; \quad \sigma_{ij}^{(n)} = \sigma_{ij}^{(0)} + \sigma_{ij}^{*(n)}. \quad (15)$$

При этом первые слагаемые справа в (15) соответствуют общему решению однородной системы дифференциальных уравнений равновесия линейной теории упругости и поэтому могут быть выражены в виде гармонических и бигармонических функций, на основе известных представлений для задачи в перемещениях в форме Буссинеска – Галеркина. Вторые слагаемые представляют собой частное решение неоднородной системы (11) с правой частью (12). Для их определения в качестве исходного этапа можно взять обобщение формулы Гурса – Альманси [11] для бигармонических функций через комплексные аналитические матричные функции

$$G_1(x_1, x_2, x_3) = {}^0\bar{\kappa}_1 \left({}^0\kappa_1 {}^0\varphi_1 \left({}^0\kappa_1 \right) \right) + \left({}^0\bar{\varphi}_1 \left({}^0\bar{\kappa}_1 \right) {}^0\bar{\kappa}_1 \right) {}^0\kappa_1 + {}^0\bar{\chi}_1 \left({}^0\bar{\kappa}_1 \right) + {}^0\chi_1 \left({}^0\kappa_1 \right). \quad (16)$$

Еще два соотношения получатся с учетом круговой перестановки. Затем строятся выражения для компонент напряжений, деформаций и поворотов. Составляющие вектора переме-

щений находятся по известным величинам дивергенции и ротора.

Без учета индексных перестановок выпишем представления для компонент σ_{ij} через комплексные C^2 -потенциалы:

$$D_{\kappa}^{(2)} \left(\sigma_{22}^{(n)} - \sigma_{11}^{(n)}, \sigma_{12}^{(n)}, \sigma_{23}^{(n)}, \sigma_{13}^{(n)} \right) = {}^0\bar{\kappa}_1 {}^0\varphi_1^{(n)*}(\kappa_1) + {}^0\chi_1^{(n)*}(\kappa_1) + {}^0G^{(n-2)};$$

$$D_{\kappa}^{(2)} \left(\sigma_{33}^{(n)} - \sigma_{22}^{(n)}, \sigma_{23}^{(n)}, \sigma_{13}^{(n)}, \sigma_{12}^{(n)} \right) = {}^0\bar{\kappa}_2 {}^0\varphi_2^{(n)*} + \chi_2^{(n)*} + {}^0F^{(n-2)},$$

которые совместно с

$$e_1 \sigma_{11}^{(n)} = \frac{1}{3} \left(\left({}^0\varphi_1^{(n)*}({}^0\kappa_1) + {}^0\bar{\varphi}_1^{(n)}({}^0\bar{\kappa}_1) \right) + \left({}^0\varphi_2^{(n)*}({}^0\kappa_2) + {}^0\bar{\varphi}_2^{(n)}({}^0\bar{\kappa}_2) \right) + \right. \\ \left. + 2 \left({}^0\bar{\kappa}_1 {}^0\varphi_1^{(n)*}({}^0\kappa_1) + {}^0\bar{\varphi}_1^{(n)}({}^0\bar{\kappa}_1) \cdot {}^0\kappa_1 \right) - \right. \\ \left. - \left({}^0\bar{\kappa}_2 \cdot {}^0\varphi_2^{(n)*}({}^0\kappa_2) + {}^0\bar{\varphi}_2^{(n)}({}^0\bar{\kappa}_2) \cdot {}^0\kappa_2 \right) + \right. \\ \left. + 2 \left({}^0\chi_1^{(n)*}({}^0\kappa_1) + {}^0\bar{\chi}_1^{(n)*}({}^0\bar{\kappa}_1) \right) - \left({}^0\chi_2^{(n)*}({}^0\kappa_2) + {}^0\bar{\chi}_2^{(n)*}({}^0\bar{\kappa}_2) \right) \right) + {}^0R_{11}^{(n-2)}; \quad (17)$$

$$e_2 \sigma_{12}^{(n)} = \frac{1}{3} \left(2 \left({}^0\bar{\kappa}_1 {}^0\varphi_1^{(n)*}({}^0\kappa_1) - \overline{{}^0\varphi_1^{(n)*}({}^0\kappa_1)} {}^0\bar{\kappa}_1 \right) - \left({}^0\bar{\kappa}_2 {}^0\varphi_2^{(n)*}({}^0\kappa_2) - \overline{{}^0\varphi_2^{(n)*}({}^0\kappa_2)} {}^0\bar{\kappa}_2 \right) + \right. \\ \left. + 2 \left({}^0\chi_1^{(n)*}({}^0\kappa_1) + \overline{{}^0\chi_1^{(n)*}({}^0\kappa_1)} \right) - \left({}^0\chi_2^{(n)*}({}^0\kappa_2) + \overline{{}^0\chi_2^{(n)*}({}^0\kappa_2)} \right) \right) + {}^0R_{12}^{(n-2)};$$

$$e_1 (\sigma_{22} - \sigma_{11}) = \frac{1}{3} \left(\left({}^0\bar{\kappa}_1 \cdot {}^0\varphi_1^{(n)*}({}^0\kappa_1) + \overline{{}^0\varphi_1^{(n)*}({}^0\kappa_1)} \cdot {}^0\bar{\kappa}_1 \right) - \left({}^0\bar{\kappa}_2 \cdot {}^0\varphi_2^{(n)*}({}^0\kappa_2) + \overline{{}^0\varphi_2^{(n)*}({}^0\kappa_2)} \cdot {}^0\bar{\kappa}_2 \right) - \right. \\ \left. - \left({}^0\chi_1^{(n)*}({}^0\kappa_1) + \overline{{}^0\chi_1^{(n)*}({}^0\kappa_1)} \right) + {}^0Q^{(n-2)}; \right.$$

$$e_1 \sigma = \frac{1}{2} \left(\left({}^0\varphi_1^{(n)*}({}^0\kappa_1) + \overline{{}^0\varphi_1^{(n)*}({}^0\kappa_1)} \right) + \left({}^0\varphi_2^{(n)*}({}^0\kappa_2) + \overline{{}^0\varphi_2^{(n)*}({}^0\kappa_2)} \right) \right) + {}^0R^{(n-2)}$$

полностью решают задачу в напряжениях.

Заметим, что в последних формулах верхние правые индексы в скобках указывают на порядок приближения, левые – на характер вырождения. Добавочные члены с индексами $n - 2$

определяются через решения на предыдущих этапах и интерпретируются как известные.

Переведа действительное решение для перемещений из E_3 в C^2 на основе (16), (17), получим

$$2\mu {}^0u^{(n)}({}^0\kappa) = \frac{7-8\nu}{3} {}^0\varphi^{(n)}({}^0\kappa) - \overline{{}^0\varphi^{(n)}({}^0\kappa)} {}^0\kappa - \overline{{}^0\chi^{(n)*}({}^0\bar{\kappa})} + {}^0B^{(n-2)}. \quad (18)$$

Или каждую координату вектора перемещений выразим через свои комплексные потенциалы:

$$\begin{aligned} 2\mu u_1^{(n)} e_1 &= \operatorname{Re} \left(\frac{7-8\nu}{3} {}^0\varphi^{(n)}({}^0\kappa) - \overline{{}^0\varphi^{(n)'}}({}^0\bar{\kappa}) {}^0\kappa - \overline{{}^0\chi^{(n)'}}({}^0\bar{\kappa}) + {}^0B_1^{(n-2)} \right); \\ 2\mu u_2^{(n)} e_1 &= \operatorname{Im} \left(\frac{7-8\nu}{3} {}^0\varphi^{(n)}({}^0\kappa) - \overline{{}^0\varphi^{(n)'}}({}^0\bar{\kappa}) {}^0\kappa - \overline{{}^0\chi^{(n)'}}({}^0\bar{\kappa}) + {}^0B_2^{(n-2)} \right); \\ 2\mu u_3^{(n)} e_1 &= \operatorname{Re} \left(\frac{7-8\nu}{3} {}^0\phi^{(n)}({}^0\kappa) - \overline{{}^0\phi^{(n)'}}({}^0\bar{\kappa}) {}^0\kappa - \overline{{}^0\psi^{(n)'}}({}^0\bar{\kappa}) + {}^0B_3^{(n-2)} \right), \end{aligned} \quad (19)$$

что полностью решает задачу нелинейной теории упругости в перемещениях.

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} {}^0\tilde{\chi}_m^{(n)'}({}^0\kappa_m) &= \overline{{}^0\chi_m^{(n)''}}({}^0\bar{\kappa}_m) - \frac{8(1-\nu)}{3} \overline{{}^0\varphi_m^{(n)'}}({}^0\bar{\kappa}_m); \\ {}^0\varphi({}^0\kappa) &= -\frac{\partial}{\partial {}^0\kappa_1} ({}^0\varphi_1({}^0\kappa_1) + {}^0\varphi_2({}^0\kappa_2)); \quad {}^0\chi({}^0\kappa) = -\frac{\partial}{\partial {}^0\kappa_1} ({}^0\tilde{\chi}_1({}^0\kappa_1) + {}^0\tilde{\chi}_2({}^0\kappa_2)); \\ {}^0\phi({}^0\kappa) &= -\frac{\partial}{\partial {}^0\kappa_3} {}^0\varphi_3({}^0\kappa_3); \quad {}^0\psi({}^0\kappa) = -\frac{\partial}{\partial {}^0\kappa_3} {}^0\tilde{\chi}_3({}^0\kappa_3). \end{aligned}$$

Используем (6) для нахождения комплексных представлений для деформаций и поворотов:

$$\begin{aligned} \mu(\varepsilon_{11}^{(n)} + \varepsilon_{22}^{(n)} + \varepsilon_{33}^{(n)}) e_1 &= 2(1-2\nu) \operatorname{Re} \left({}^0\varphi^{(n)'}({}^0\kappa) + {}^0D_1^{(n-1)} \right); \\ 2\mu(\varepsilon_{11}^{(n)} - \varepsilon_{22}^{(n)} - \varepsilon_{33}^{(n)}) e_1 &= \operatorname{Re} \left({}^0\varphi^{(n)'}({}^0\kappa) - 6 \operatorname{Re} \left({}^0\kappa \frac{\partial}{\partial {}^0\bar{\kappa}} \right) {}^0\varphi^{(n)'}({}^0\kappa) - 3 {}^0\chi^{(n)''}({}^0\kappa) + D_2^{(n-2)} \right); \\ 4\omega_1 e_4 &= \frac{3}{2\mu} \left({}^0\bar{\kappa} {}^0\varphi^{(n)''}({}^0\kappa) - \overline{{}^0\varphi^{(n)''}}({}^0\bar{\kappa}) {}^0\kappa + {}^0D_3^{(n-2)} \right); \\ 4\mu \varepsilon_{11} e_1 &= \operatorname{Re} \left((5-8\nu) {}^0\varphi^{(n)'}({}^0\kappa) - 2 {}^0\kappa \overline{{}^0\varphi^{(n)''}}({}^0\bar{\kappa}) - 3 {}^0\chi^{(n)''}({}^0\kappa) + {}^0D_{11}^{(n-1)} \right). \end{aligned}$$

Полученные общие решения основных пространственных задач физически нелинейной теории упругости необходимы для формулировки и решения краевых задач. Использование квазиконформного отображения позволит обобщить их для трехмерных областей с регулярной граничной поверхностью и произвести оценку напряженно-деформированного состояния конструкций с концентраторами напряжений.

В качестве модельной задачи рассмотрим напряженное состояние изотропного физически нелинейного пространства с шаровой полостью радиуса r_0 при воздействии всестороннего растяжения усилиями интенсивности q . Переходя к сферическим координатам (r, θ, φ) , на основе представлений (17) получим для задачи в напряжениях при двух членах разложения:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(0)} &= \left(-\frac{r_0^3}{r^3} + 1 \right) q; \quad \sigma_{rr}^{(1)} = \frac{r_0^3 g_2^2 q^3 (1+\nu)}{18 G^2 r^3 (-1+\nu)} + \frac{(1+\nu) r_0^9 q^3 g_2^2}{18 G^2 (1-\nu) r^9}; \\ \sigma_{\theta\theta}^{(0)} &= \left(\frac{r_0^3}{2r^3} + 1 \right) q; \quad \sigma_{\theta\theta}^{(1)} = -\frac{4r_0^3}{9r^3} + \frac{g_2^2 q^3 (1+\nu)}{16 G^2 r^3 (1-\nu)} - \frac{r_0^9 q^3 g_2^2}{2 G^2 (1-\nu) r^9}. \end{aligned}$$

Решение совпадает с уже известным [15] при соответствующем выборе параметра нагружения.

ВЫВОД

Разработка современных математических методов в механике сплошных сред со сложной реологией может служить теоретической основой создания эффективных алгоритмов и пакетов прикладных программ как важной составляющей математического обеспечения систем автоматизированного проектирования для отраслей машиностроения, приборостроения и др.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мухелишвили, Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – 5-е изд. – М.: Наука, 1966.
2. Лурье, А. И. Теория упругости / А. И. Лурье. – М.: Наука, 1970.
3. Бицадзе, А. В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного / А. В. Бицадзе. – 3-е изд. – М.: Наука, 1984.
4. Мухелишвили, Н. И. Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мухелишвили. – 3-е изд. – М.: Наука, 1968.
5. Гахов, Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – М.: Физматгиз, 1963.
6. Ключников, В. Д. Математическая теория пластичности / В. Д. Ключников. – М.: Изд-во МГУ, 1979.
7. Савин, Г. Н. Метод возмущения упругих свойств в механике твердых деформируемых тел / Г. Н. Савин, Ю. Н. Немиш // ДАН СССР. – 1974. – Т. 216, № 1. – С. 53–55.
8. Александров, Л. Я. Пространственные задачи теории упругости / Л. Я. Александров, Ю. И. Соловьев. – М.: Наука, 1978.
9. Александрович, А. И. Применение теории функций двух комплексных переменных в теории упругости / А. И. Александрович. // ДАН СССР. – 1977. – Т. 232, № 3. – С. 542–544.
10. Мельниченко, И. П. Кватернионные переменные и гиперкомплексные потенциалы в механике сплошной среды / И. П. Мельниченко, Е. М. Пик // Прикладная механика. – 1973. – Т. 9, вып. 4. – С. 45–50.
11. Богачев, Ф. А. Описание решений пространственных задач теории упругости через бигармонические функции / Ф. А. Богачев // Проблемы прочности и пластичности / Изд-во Новгородского ун-та. – 1996. – Вып. 45. – С. 63–71.
12. Penrod, D. D. Analogue of complex formulas of for three-dimensional problems of the theory of elasticity / D. D. Penrod // Quart. Appl. Math. – 1966. – V. 23, № 4. – P. 312–322.
13. Ганнинг, Р. Аналитические функции многих комплексных переменных / Р. Ганнинг, Х. Росси. – М.: Мир, 1969.
14. Каудерер, Г. Нелинейная механика / Г. Каудерер. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
15. Левчук, О. И. О влиянии физической нелинейности материала на напряженное состояние среды с упругим сферическим включением при равномерном нагружении / О. И. Левчук // Прикладная механика. – 1989. – Т. 34, вып. 11. – С. 46–51.

Поступила 13.01.2006