DOI: 10.21122/2227-1031-2017-16-4-355-362

УДК 539.3

Энергетические инварианты в теории упругопластических трещин

М. А. Гундина[1)]

[1)]Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

Реферат. Рассмотрена задача о прямолинейной трещине в упрочняющемся упругопластическом материале с нагрузкой, приложенной на бесконечности в условиях плоской деформации. При распространении *J*-интеграла на этот случай необходимо учитывать характерные особенности, связанные с потенциалом деформаций для сред с неголономными уравнениями состояния. В задаче о трещине в упругопластическом материале главный член асимптотического разложения в окрестности вершины имеет, наряду с неопределенным множителем, и неизвестный показатель сингулярности. Для стали 12Х18Н9Т показано, как из условия инвариантности энергетического интеграла можно отыскать показатель сингулярности главного члена напряжений. Приведены зависимости длины трещины, соотнесенной к допустимой длине по Гриффитсу, от приложенной нагрузки, соотнесенной к пределу текучести. Описаны представления *J*-интегралов для решения квазистатической задачи. Разработанный подход может использоваться для формулировки критерия разрушения упругопластического материала, содержащего прямолинейную трещину. Полученные теоретические зависимости по определению характеристик предельного состояния конструкции позволяют сделать мотивированный выбор геометрических параметров с учетом прочностных свойств материала. Результаты исследований могут быть использованы при разработке рекомендаций для создания конструкций с заданными свойствами. Данный подход целесообразно применять для определения предельных усилий и критического значения длины трещины для упругопластического материала.

Ключевые слова: метод асимптотических разложений, трещина, критерий разрушения, *J*-интеграл, теория течения, упругопластический материал

Для цитирования: Гундина, М. А. Энергетические инварианты в теории упругопластических трещин / М. А. Гундина // *Наука и техника*. 2017. Т. 16, № 4. С. 355–362. DOI: 10.21122/2227-1031-2017-16-4-355-362

Energy Invariants in Theory of Elastoplastic Cracks

M. A. Hundzina[1)]

[1)]Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. The paper considers a problem on a rectilinear crack in hardening elastoplastic material with load which is applied at infinity under plane-strain deformation conditions. While distributing *J*-integral in this case it is necessary to take into account specific characteristics associated with strain potential for environments with nonholonomic state equations. While considering a problem on a crack in elastoplastic material a principal term of asymptotic expansion in crack tip vicinity has an unknown singularity index in addition to an indefinite multiplier. It has been shown for steel 12Х18Н9Т that while having invariance of energy integral it is possible to trace a singularity index for a principal term of stresses. The paper presents dependences of crack length compared to permissible Griffith's length in accordance with the applied load which is associated with yield strength. Conceptions of *J*-integrals have been described for solution of a quasi-static problem. The developed approach can be used to formulate a criterion for destruction of elastoplastic material containing a rectilinear crack. The obtained theoretical dependences pertaining to determination of structure limit state characteristics have permitted to make a motivated selection of geometric parameters with due account of material strength properties. Results of the investigations can be used while preparing recommendations for development of structures with prescribed properties. The given approach makes most sense to be applied for determination of critical forces and critical value of crack length for elastoplastic material.

Keywords: asymptotic expansion method, crack, fracture criterion, *J*-integral, flow theory, elastoplastic material

For citation: Hundzina M. A. (2017) Energy Invariants in Theory of Elastoplastic Cracks. *Science and Technique*. 16 (4), 355–362. DOI: 10.21122/2227-1031-2017-16-4-355-362 (in Russian)

Адрес для переписки
Гундина Мария Анатольевна
Белорусский национальный технический университет
ул. Я. Коласа, 22,
220013, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 17 292-67-84
maryanatolevna@mail.ru

Address for correspondence
Hundzina Marija A.
Belarusian National Technical University
22 Ya. Kolasa str.,
220013, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: +375 17 292-67-84
maryanatolevna@mail.ru

Введение

Наряду с описанием напряженно-деформированного состояния упругого или упругопластического тела, необходимо определять критерии прочности, на основе которых устанавливается момент исчерпания несущей способности материала в точке или тела в целом. Такого рода критерии упругопластического разрушения или критерии начала распространения трещины не вытекают из разрешающих уравнений механики сплошных сред. Как правило, это дополнительное краевое условие.

Ввиду определенных трудностей постановочного и вычислительного характера для задачи определения предельного равновесного состояния деформируемого твердого тела с трещиной, сложились подходы, в основу которых положены некоторые предположения о характере распределения напряжений и механизме разрушения в вершине трещин: энергетические, силовые и деформационные критерии разрушения. Одним из основополагающих в механике трещин принято считать энергетический критерий Гриффитса для хрупкого разрушения и его модификацию, согласно концепции Орована – Ирвина, на случай квазихрупкого разрушения [1]. В основу этого критерия положено представление о балансе освобождающейся упругой энергии линейного деформирования и приращения поверхностной энергии при увеличении длины трещины в случае хрупкого разрушения или работы пластической деформации в тонком слое у вершины трещины перед его квазихрупким разрушением. Однако решение линейной задачи приводит к неограниченным напряжениям у вершины трещины, приращение же поверхностной энергии и работа пластической деформации содержат ограниченные значения напряжений, соответствующие реальной диаграмме деформирования, что свидетельствует об ограниченной применимости подобных критериев.

Обобщением энергетического критерия Гриффитса является J-критерий, или критерий Черепанова – Райса [2]. Известно, что величина силы сопротивления раскрытию трещины при определенных предположениях может быть представлена в виде некоторого интеграла по пути, не зависящего от этого пути. Интегрирование происходит по произвольному контуру, охватывающему вершину трещины. В основе силовых критериев лежит представление о предельной поверхности в пространстве напряжений. Однако в случае линейно-упругой задачи в вершине трещины возникают бесконечные напряжения. Поэтому, согласно концепции Ирвина [3], принято строить предельную поверхность относительно коэффициентов интенсивности, являющихся множителями в сингулярных составляющих и характеризующих асимптотическое распределение напряжений вблизи вершины трещины. Если исходить из реальной нелинейной диаграммы деформирования материала, которая всегда имеет ограниченное напряжение, то вполне логично, что бесконечных напряжений в вершине трещины быть не может. Поэтому понятие «коэффициент интенсивности» в асимптотическом представлении решения вблизи вершины – результат идеализированной диаграммы деформирования, допускающей бесконечные напряжения. Следовательно, возможность достоверного экспериментального определения его предельного значения не является обоснованной.

Исходное представление деформационных критериев – классический критерий прочности в виде предельной поверхности в пространстве деформаций. Однако, ввиду трудности определения деформаций в вершине трещины, вместо них вводится понятие раскрытия или смещения берегов трещины в ее тупиковой части, относительно которых строится предельная поверхность. В этом случае возникает вопрос о корректности такой замены, поскольку раскрытие в вершине трещины в действительности равно нулю при отличной от нуля растягивающей или сдвиговой деформации, а понятие «тупиковая часть трещины» не имеет строгого определения. Это приводит к трудностям как решения соответствующих задач, так и экспериментального определения предельных значений вводимых параметров.

Применение *J*-интеграла к вычислению собственных значений краевых задач для случая статической трещины

Рассмотрим задачу о статической прямолинейной трещине в упрочняющемся упругопластическом материале с нагрузкой, приложенной на бесконечности в случае плоской деформации. Положим, имеется двумерное деформационное поле, все компоненты которого определяются только двумя декартовыми координатами. Заметим, что при распространении J-интеграла на этот случай необходимо учитывать характерные особенности, связанные с потенциалом деформаций для сред с неголономными уравнениями состояния.

Приращение полной работы напряжения на соответствующих деформациях имеет вид

$$\delta U_0 = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}, \qquad (1)$$

где σ_{ij}, ε_{ij} – компоненты напряжений и деформаций.

Функция (1) не является однозначной относительно компонент деформаций, поскольку напряжения в рамках теории течения с упрочнением также неоднозначно зависят от деформаций. Полная работа – это количественная характеристика интенсивности поля напряжений в окрестности вершины трещины в упругопластическом теле.

Вследствие инвариантности вектора потока величина J не зависит от того, где проведен контур, отхватывающий вершину трещины:

$$J = \int_\Gamma \left(\left(U_0 + \frac{1}{2}\rho u_{i,x_1} u_{i,x_1} \right) n_1 - \sigma_{ij} n_j u_{i,x_1} \right) d\Gamma, \qquad (2)$$

где $u_{i,x_1} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_1}$ – производная компонентов вектора перемещений; ρ – плотность материала; Γ – контур, охватывающий вершину трещины; U_0 – полная работа напряжения на соответствующих деформациях; x_1 – ось, направленная вдоль оси трещины.

В двумерных задачах контур Γ можно считать окружностью радиусом ε с центром в вершине трещины. Интеграл по малому круговому контуру, содержащему внутри себя вершину трещины, может служить адекватной характеристикой состояния окрестности вершины трещины, причем подынтегральная функция зависит от напряжений, деформаций и перемещений точек вблизи вершины трещины. Такой интеграл не зависит от пути интегрирования и, таким образом, представляет скорость уменьшения энергии при любом выборе кривой Γ.

Рассмотрим замкнутый контур Γ_1, Γ_2 в виде кривой (рис. 1), окружающий вершину трещины, начинающийся на нижней плоской части поверхности трещины и заканчивающийся на верхней ее части. Обход контура осуществляется в положительном направлении, s – длина дуги. Пусть J_{Γ_1} и J_{Γ_2} – соответствующие значения интеграла. Тогда, поскольку члены подынтегрального выражения обращаются в нуль на плоских поверхностях разреза, $J_{\Gamma_1} - J_{\Gamma_2}$ – это значение интеграла от величины $\left(U_0 + \frac{1}{2}\rho u_{i,x_1} u_{i,x_1} \right) n_1 - \sigma_{ij} n_j u_{i,x_1}$, взятого по границе области, ограниченной $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, этими кривыми и поверхностями выреза в направлении против часовой стрелки.

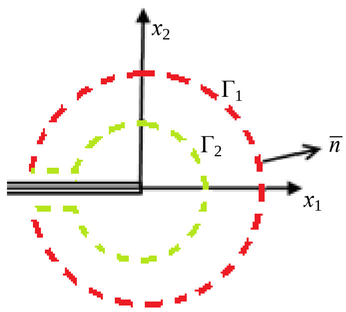

Рис. 1. Контур, окружающий вершину трещины: Γ_1, Γ_2 – замкнутый контур; n – нормаль к контуру

Fig. 1. Contour circling crack tip: Γ_1, Γ_2 – closed contour; n – normal to contour

Если удельная работа разрушения γ положительна, то уравнение $J = 2\gamma$ является условием предельного равновесия упругопластической трещины, т. е. энергетическим критерием. При этом $\gamma = \text{const}$. Инвариантность интеграла относительно пути справедлива и для путей, проходящих через пластическую зону.

В момент страгивания трещины возможно значительное пластическое деформирование конструкции, при котором диссипация энергии может оказать существенное влияние на кинетику трещины. При развитии трещины в подавляющем большинстве случаев пластическая деформация локализована у вершины движущейся трещины. Скорость высвобождения упругой энергии при образовании новой поверхности трещины длиной Δl можно представить как работу сил сцепления по берегам трещины за время прохождения вершиной этого расстояния с определенной скоростью.

Асимптотические решения краевых задач теории трещин в нелинейной постановке обладают значительной степенью произвола. Даже в случае задачи о неподвижной упругопластической трещине главный член разложения в окрестности вершины имеет наряду с неопределенным множителем и неизвестный показатель сингулярности. Покажем, как из условия инвариантности энергетического интеграла можно отыскать показатель сингулярности главного члена напряжений.

Известно, что интеграл по замкнутому контуру для функции равен нулю

$$\int\limits_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \left(\left(U_0 + \frac{1}{2}\rho u_{i,x_1} u_{i,x_1} \right) n_1 - \sigma_{ij} n_j u_{i,x_1} \right) d\Gamma = 0. \quad (3)$$

Из (3) получим соотношение для нахождения λ_0, подставляя в него разложения через функцию напряжений. Сделаем предположение, что пластическая область полностью окружает вершину трещины, при отсутствии зоны разгрузки запишем члены, входящие в соотношение J-интеграла:

$$J = J_1 + J_2 - J_3, \quad (4)$$

где

$$J_1 = \int\limits_{\Gamma_t \cup \Gamma_1} U_0 n_1 d\Gamma = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} -$$
$$-((\sigma_{rr}\varepsilon_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}\varepsilon_{\varphi\varphi} + \sigma_{r\varphi}\varepsilon_{r\varphi}))r\sin\varphi\, d\varphi. \quad (5)$$

Представляя компоненты вектора приращений в виде [4–6]

$$u_r(r,\varphi) = U_0(\varphi) r^{\lambda_0}; \quad u_\varphi(r,\varphi) = V_0(\varphi) r^{\lambda_0}, \quad (6)$$

получим

$$u_1 = u_r = U_0(\varphi) r^{\lambda_0};$$
$$u_2 = r u_\varphi(r,\varphi) = V_0(\varphi) r^{\lambda_0 + 1}. \quad (7)$$

Обобщение метода асимптотического разложения заключается в том, что последовательность $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ подлежит определению наряду с функциями $U_n(\varphi)$, $V_n(\varphi)$. Тогда остальные интегралы примут вид:

$$J_2 = -\frac{1}{2}\rho\int\limits_0^{2\pi} \left(\left(u_{r,r}\cos\varphi - u_{r,\varphi}\frac{\sin\varphi}{r} \right)^2 + \right.$$
$$\left. + (-u_{\varphi,\varphi}\sin\varphi + r u_{\varphi,r}\cos\varphi + u_\varphi\cos\varphi)^2 \right) r\sin\varphi\, d\varphi;$$

(8)

$$J_3 = \int\limits_0^{2\pi} -\left(\left(\sigma_{11}\left(-u_{r,\varphi}\frac{\sin\varphi}{r} + u_{r,r}\cos\varphi \right) + \right. \right.$$
$$\left. \left. + \sigma_{21}(-u_{\varphi,\varphi}\sin\varphi + r u_{\varphi,r}\cos\varphi + u_\varphi\cos\varphi) \right) \right) \times$$
$$\times r\sin\varphi\, d\varphi + \int\limits_0^{2\pi} \left(\sigma_{12}\left(-u_{r,\varphi}\frac{\sin\varphi}{r} + u_{r,r}\cos\varphi \right) + \right.$$
$$\left. + \sigma_{22}(-u_{\varphi,\varphi}\sin\varphi + r u_{\varphi,r}\cos\varphi + u_\varphi\cos\varphi) \right) r\cos\varphi\, d\varphi.$$

Компоненты напряжений связаны следующими соотношениями:

$$\sigma_{11} = \sigma_{rr}\cos^2\varphi + \sigma_{\varphi\varphi}\sin^2\varphi - \sigma_{r\varphi}\sin 2\varphi;$$
$$\sigma_{12} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}\right)\sin 2\varphi + \sigma_{r\varphi}\cos 2\varphi; \quad (9)$$
$$\sigma_{22} = \sigma_{\varphi\varphi}\cos^2\varphi + \sigma_{rr}\sin^2\varphi + \sigma_{r\varphi}\sin 2\varphi.$$

При вычислении J-интеграла нулевые члены компонентов перемещений и среднего напряжения были приближены частичными суммами рядов Фурье. Затем для верхней и нижней границ области сходимости метода вычисляли J-интегралы и были найдены значения для λ_0.

Применение *J*-интеграла к вычислению собственных значений для случая страгивающейся трещины

При исследовании квазистатического роста трещины в упругопластическом материале будем пользоваться энергетической концепцией Г. П. Черепанова [2]. При приращении длины трещины на бесконечно малую величину Δl полная энергия $\gamma\Delta l = \Delta A_l + \Delta A_p$. Слагаемое ΔA_l равно по величине высвобождающейся упругой энергии, оно соответствует тому, что в процессе увеличения длины трещины на Δl внешняя нагрузка оставалась неизменной. Второе слагаемое представляет собой необратимую работу пластических деформаций, вызванную увеличением пластической области в процессе нагружения и не связанную с ростом трещины. Оно соответствует тому, что в процессе увеличения нагрузки длина трещины остается неизменной.

Представляет практический интерес изучение докритического роста трещины в упрочняющемся упругопластическом материале при монотонном нагружении с целью выяснения зависимости удлинения трещины от приложенной нагрузки. Для этого запишем J-интеграл для упругопластической задачи о страгивающейся линейной трещине. Вследствие инвариантности вектора потока следующая величина не зависит от того, где проведен контур, отхватывающий вершину трещины:

$$J = \int_{\Gamma}\left(\left(U_0 + \frac{1}{2}\rho \mathring{l} u_{i,x_1} u_{i,x_1}\right) n_1 - \sigma_{ij} n_j u_{i,x_1}\right) d\varsigma, \quad (10)$$

где $u_{i,x_1} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_1}$; $\mathring{l}$ – скорость распространения трещины; если трещина растет устойчиво, то скорость распространения трещины прямо пропорциональна скорости увеличения нагрузки P; x_1 – ось, направленная вдоль оси трещины.

Интеграл (10) позволяет сформулировать условие распространения трещин.

Сравним потенциальную энергию тела с вырезом длиной l и потенциальную энергию тела с вырезом $(l + dl)$ и с концом такой же геометрической формы, так что все изменение состоит в удлинении плоской части поверхности выреза на dl. Понимаем далее Π как потенциальную энергию слоя единичной толщины. При продвижении трещины на величину Δl конфигурация контура у вершины трещины не меняется. В результате изменения длины трещины на Δl изменяется потенциальная энергия (диссипация) и $J = -\dfrac{d\Pi}{dl}$. В этом случае J-интеграл представляет собой скорость уменьшения энергии при заданном выборе кривой. Для стали 12Х18Н9Т найдены следующие значения λ_0: в случае плоской деформации $\lambda_0 = 1{,}668$, в случае плоского напряженного состояния $\lambda_0 = 1{,}762$. Эти значения близки к тем, которые найдены при вычислении J-интеграла при плоской деформации [7, 8].

Критерий разрушения на основе *J*-интеграла

Свойство инвариантности, а также сингулярность напряжений и деформаций позволяют принять J-интеграл в качестве критериальной величины для формулировки критерия разрушения. Положим, что существуют две трещины: одна – в компактном образце, предназначенном для испытаний в лабораторных условиях, вторая – в крупном элементе реальной конструкции. В обоих случаях и образец, и элемент изготовлены из одного и того же материала с высокой пластичностью. Тогда рассчитанные значения J-интеграла в случае их равенства некоторому постоянному значению J_{IC} говорят о начале роста трещины. В то же время при высокой пластичности, прежде чем будет достигнуто значение J_{IC}, в компактом образце возникнет значительная пластическая деформация и уменьшается стеснение деформаций. При этом может случиться, что даже после достижения значения J_{IC} будет происходить устойчивое распространение трещины. В хрупком элементе конструкции при достижении значения J_{IC} еще будет маломасштабная текучесть, а за пределами этого значения произойдет неустойчивое разрушение. Так, результаты экспериментальных исследований для различных материалов показывают, что существует предельное значение $J_{IC} = (170–190)$ кДж/м^2, соответствующее возникновению разрушения и не зависящее от конфигурации образца для наиболее распространенных легированных сталей $J = J_{IC}$. Сформулируем окончательный критерий разрушения следующим образом: трещина начинает распространяться, когда инвариантный J-интеграл достигает предельного значения J_{IC}.

Для того чтобы воспользоваться данным критерием, необходимо располагать значением J-интеграла как функцией длины трещины. Для этого можно применять численные методы расчета. Рассмотрим задачу определения критического напряжения и критической длины трещины, при которых происходит мгновенное распространение трещины по всему сечению элемента конструкции, что приводит к разрушению тела на части. По Гриффитсу высвобожденная потенциальная энергия

$$\Pi = \frac{P^2}{2E}\pi l^2 b, \qquad (11)$$

где l − длина трещины; b − толщина пластины; E − модуль Юнга; P − номинальное напряжение.

Энергия переходит в работу образования новых поверхностей

$$A = 2G_c l b, \qquad (12)$$

где G_c − удельная работа образования новых поверхностей на единицу площади поверхности.

Самопроизвольное распространение трещины происходит, когда скорость высвобождения потенциальной энергии больше скорости поглощения энергии, идущей на образование новых поверхностей. Оно начинается тогда, когда процесс становится выгоден для тела, т. е. суммарный запас энергии тела начинает уменьшаться: Если $\frac{d\Pi}{dl} < \frac{dA}{dl}$ – разрушения нет, если $\frac{d\Pi}{dl} \geq \frac{dA}{dl}$ – самопроизвольное распространение трещины.

В критическом состоянии $\frac{d\Pi}{dl} = \frac{P^2 \pi l_{\text{Гр}} b}{E} = \frac{dA}{dl} = 2G_c b.$ Отсюда максимальная допустимая (критическая) длина трещины $l_{\text{Гр}}$ при заданной нагрузке P определяется по формуле Гриффитса

$$l_{\text{Гр}} = \frac{2G_c E}{\pi P^2}, \qquad (13)$$

где P − значение приложенной на бесконечности нагрузки; G_c − модуль сдвига.

В рамках теории течения с упрочнением, следуя формулам, полученным в [8], имеем, что скорость диссипации энергии в пластической зоне

$$\frac{d\Pi}{dl} = \frac{2\pi p^2 l}{3E} F(P). \qquad (14)$$

С другой стороны, как было сказано выше, при изменении длины трещины на Δl изменяется потенциальная энергия (диссипация), и $J = -\frac{d\Pi}{dl}$. В этом случае J-интеграл представляет собой скорость уменьшения энергии при заданном выборе кривой

$$J = -\frac{d\Pi}{dl} = \frac{2\pi p^2 l}{3E} F(P), \qquad (15)$$

где F – некоторая функция, зависящая от нагрузки, соотнесенной к пределу текучести; E – модуль упругости.

Выясним зависимость удлинения трещины от внешней нагрузки для рассматриваемых законов распределения в рамках теории течения с упрочнением. На основании энергетического критерия локального разрушения получим выражение критической длины трещины в виде

$$l = l_{\text{Гр}}(1 - 4F(P))^{-1} = l_{\text{Гр}}\left(1 - 4J\frac{3E}{2\pi P^2}\right)^{-1}. \qquad (16)$$

Построим график зависимости длины (рис. 2), соотнесенной к допустимой длине по Гриффитсу от приложенной нагрузки, соотнесенной к пределу текучести для стали 12Х18Н9Т с модулем упругости 1,95 ГПа и пределом текучести 280,00 МПа [9, 10].

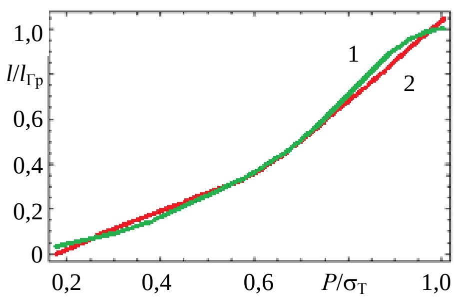

Рис. 2. Зависимость длины трещины $l/l_{\text{Гр}}$ от величины приложенной нагрузки, соотнесенной к пределу текучести: 1 – значения, полученные в рамках деформационной теории; 2 – то же для стали, полученные методом асимптотических разложений

Fig. 2. Dependence of crack length $l/l_{\text{Гр}}$ on value of applied load associated with yield strength for values obtained: 1 – in framework of deformation theory; 2 – for steel while using asymptotic expansion method

Кривые, полученные в первом и втором случаях, слабо отличаются. Выбор соответствующих определяющих соотношений несущественно сказывается при расчете критической длины трещины. Однако данный вывод справедлив с учетом предположения о малости пластической области. Значение удлинения, соответствующее наибольшей нагрузке, отвечает началу нестабильного развития трещины. В этом случае квазистатический анализ уже не применим, а необходим подход, учитывающий динамические процессы, происходящие в элементе конструкции, обусловленные развитием трещины с конечной скоростью.

Актуальность анализа закритического развития трещины связана с возможным отсутствием катастрофического разрушения конструкции вследствие остановки нестабильно растущей трещины за счет различных факторов. И наоборот, критическое напряжение, которое вызывает самопроизвольное развитие трещины, определяется из выражения

$$P_{cr} = \sqrt{(1 - l_{\text{Гр}} / l)\frac{2\pi}{12JE}}. \qquad (17)$$

Полученные результаты позволяют сделать вывод о необходимости использования теории пластичности с угловой точкой в инженерных расчетах на прочность конструкций с дефектами типа трещин. Это приводит к увеличению расчетных значений максимальных допустимых нагрузок. Заметим, что чем больше конструкция, тем больше должна быть критическая длина трещины, но тем меньше становится рабочее напряжение.

ВЫВОДЫ

1. Для оценки работоспособности упругопластического материала использовали энергетический критерий на основе интеграла Черепанова – Райса, характеризующий прочность материала с трещиной. Найдено аналитическое представление *J*-интеграла для упругопластического упрочняющегося материала.

2. С помощью интегральных энергетических инвариантов получен критерий прочности для упрочняющихся упругопластических материалов, описываемых неголономными уравнениями состояния.

3. Зависимости критического приращения длины трещины от значения приложенной нагрузки, найденные методом асимптотических разложений в рамках теории течения с упрочнением, близки с соответствующими зависимостями, полученными в рамках деформационной теории. Это справедливо с учетом предположения о малости пластической области. Значение удлинения, соответствующее наибольшей нагрузке, отвечает началу нестабильного развития трещины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Griffith, A. A. The Theory of Rupture / A. A. Griffith // Proc. of First Int. Congress of Applied Mechanics. 1924. P. 55–63.
2. Черепанов, Г. П. О распространении трещин в сплошной среде / Г. П. Черепанов // Прикладная математика и механика. 1967. Т. 31, № 3. С. 476–488. DOI: 10.1016/0021-8928(67)90034-2.
3. Irwin, G. R. Fracture Dynamics / G. R. Irwin // Fracturing of Metals. Cleveland: ASM, l948. P. 147–166.
4. Nifagin, V. Quasistatic Stationary Growth of Elastoplastical Single Crack / V. Nifagin, M. Hundzina // International Journal of Engineering, Business and Enterprise Applications. 2014. No 10. P. 6–12
5. Нифагин, В. А. Применение *J*-интеграла к вычислению собственных значений в краевых задачах теории трещин / В. А. Нифагин, М. А. Гундина // Инновации в материаловедении: материалы Второй всерос. молодежн. науч.-техн. конф. М., 2015. С. 392–393.
6. Нифагин, В. А. Применение *J*-интеграла к вычислению собственных значений краевой задачи о стационарно распространяющейся трещине в упрочняющемся упруго-пластическом материале / В. А. Нифагин, М. А. Гундина // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: тез. докл. VIII междунар. семинара. Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2015. С. 65
7. Гундина, М. А. Применение *J*-интеграла для вычисления собственных значений дифференциальных операторов / М. А. Гундина // Наука – образованию, производству, экономике: материалы XIII междунар. научно-технической конф. / Белорусский национальный технический университет; редкол. Б. М. Хрусталев (гл. ред.) [и др.]. Минск, 2015. Т. 3. С. 412.
8. Куземко, В. А. Плоскопластическая деформация в малой окрестности конца трещины / В. А. Куземко, К. Н. Русинко // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1983. № 2. С. 124–127.
9. Костров, Б. В. Механика хрупкого разрушения / Б. В. Костров, Л. В. Никитин, Л. М. Флитман // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1969. № 3. С. 112–125.
10. Галатенко, Г. В. К определению вязкости разрушения *K* [*Ic*] пластичных сталей при нормальных условиях / Г. В. Галатенко // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2007. Т. 73, № 5. С. 50–53.

Поступила 17.02.2017
Подписана в печать 20.04.2017
Опубликована онлайн 28.07.2017

REFERENCES

1. Griffith A. A. (1924) The Theory of Rupture. *Proceedings of the First International Congress for Applied Mechanics.* Delft, 55–63.
2. Cherepanov G. P. (1967) Crack Propagation in Continuous Media. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics,* 31 (3), 503–512. DOI: 10.1016/0021-8928(67)90034-2.
3. Irwin G. R. (1948) Fracture Dynamics. *Fracturing of Metals*. Cleveland, ASM, 147–166.
4. Nifagin V., Hundzina M. (2014) Quasistatic Stationary Growth of Elastoplastical Single Crack. *International Journal of Engineering, Business and Enterprise Applications,* 10, 6−12.
5. Nifagin V. A., Gundina M. A. (2015) Application of *J*-Integral for Calculation of Characteristic Values in Respect of Boundary Problems of Crack Theory. *Innovatsii v Materialovedenii: Materialy Vtoroi Vseros. Molodezh. Nauch.-Tekhn. Konf.* [Innovations in Material Science: Proceedings of the 2nd All-Russia Youth Scientific and Technical Conference]. Moscow, 392−393 (in Russian).
6. Nifagin V. A., Gundina M. A. (2015) Application of *J*-Integral for Calculation of Characteristic Values in Respect of Boundary Problems Pertaining to Stationary Propagating Crack in Strain-Hardening Elastoplastic Material. *Analiticheskie Metody Analiza i Differentsial'nykh Uravnenii: Tezisy Dokladov VIII Mezhdunarodnogo Nauchnogo Seminara* [Analytic Methods of Analysis and Differential Equations: Book of Report Abstracts Presented at the VIII International Conference]. Minsk, National Academy of Sciences of Belarus Institute of Mathematics, 65 (in Russian).
7. Gundina M. A. (2015) Application of *J*-Integral for Calculation of Characteristic Values in Respect of Differential Operators / M. A. Gundina. *Nauka – Obrazovaniiu, Proizvodstvu, Ekonomike. Materialy XIII Mezhdunarodnoi Nauch.-Tekhn. Konf. T. 3* [Science to Education, Industry, Economics. Proceedings of XIII International Science and Technical Conference. Vol. 3]. Minsk, Belarusian National Technical University, 412 (in Russian).
8. Kuzemko V. A., Rusinko K. N. (1983) Flat-Plastic Deformation in the Small Neighborhood of Crach End. *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Mekhanika Tverdogo Tela* [Mechanics of Solids], (2), 124−127 (in Russian).
9. Kostrov B. V., Nikitin L. V., Flitman L. M. (1969) Mechanics in Bruttle Fracture. *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Mekhanika Tverdogo Tela* [Mechanics of Solids], (3), 112–125 (in Russian).
10. Galatenko G. V. (2007) For Determination of Crack Toughness *K* [*Ic*] in Plastic Steel Under Normal Coditions. *Zavodskaya Laboratoriya. Diagnostika Materialov* [Industrial Laboratory. Materials Diagnostics], 73 (5), 50−53 (in Russian).

Received: 17.02.2017
Accepted: 20.04.2017
Published online: 28.07.2017