DOI: 10.21122/2227-1031-2017-16-4-343-347

УДК 519.6

К приближенному интегрированию сильно осциллирующих функций

Докт. физ.-мат. наук, проф. И. Н. Мелешко[1], Д. А. Нифонтова[1], В. В. Сорокин[1]

[1]Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

Реферат. Построены и исследованы простейшие приближенные формулы для численного интегрирования функций, содержащих осциллирующие множители специального вида с параметром. Общие квадратурные формулы в этом случае могут быть использованы только при достаточно малых значениях параметра. Следовательно, чтобы получить формулы численного интегрирования, пригодные при изменении параметра в широких границах, необходимо заранее учитывать наличие сильно осциллирующих множителей. Это можно сделать, принимая, например, такие множители за весовые функции. Кроме того, поскольку параметр способен принимать значения, которые заранее предвидеть не всегда можно, приближенные формулы для вычисления таких интегралов необходимо строить так, чтобы они содержали этот параметр в буквенном виде и были пригодны для вычисления при любых, в частности при больших, значениях параметра. Вычислительные правила, обладающие такими свойствами, обычно получают путем разбиения промежутка интегрирования на элементарные с последующим приближением плотности интеграла на каждом элементарном промежутке многочленами первой, второй и третьей степеней, принимая при этом осциллирующие множители за весовые функции. В статье рассмотрен тот вариант, когда плотность интегралов на каждом элементарном промежутке аппроксимируется многочленом нулевой степени – константой, равной значению плотности в середине этого промежутка. Попутно сконструирована одна приближенная формула для вычисления несобственного интеграла по бесконечному промежутку от функции, содержащей осциллирующий множитель специального вида. При этом предполагали, что плотность несобственного интеграла достаточно быстро стремится к нулю, когда модуль аргумента неограниченно возрастает. Другими словами, она считается пренебрежимо малой вне некоторого конечного отрезка. Получены равномерные по параметру оценки погрешностей приближенных формул, позволяющие вычислять интегралы с заданной точностью.

Ключевые слова: интегралы, приближенное интегрирование, приближенные формулы, осциллирующая функция

Для цитирования: Мелешко, И. Н. К приближенному интегрированию сильно осциллирующих функций / И. Н. Мелешко, Д. А. Нифонтова, В. В. Сорокин // *Наука и техника*. 2017. Т. 16, № 4. С. 343–347. DOI: 10.21122/2227-1031-2017-16-4-343-347

Approximate Integration of Highly Oscillating Functions

I. N. Melashko[1], D. A. Nifontova[1], U. U. Sorokin[1]

[1]Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. Elementary approximate formulae for numerical integration of functions containing oscillating factors of a special form with a parameter have been proposed in the paper. In this case general quadrature formulae can be used only at sufficiently small values of the parameter. Therefore, it is necessary to consider in advance presence of strongly oscillating factors in order to obtain formulae for numerical integration which are suitable in the case when the parameter is changing within wide limits. This can be done by taking into account such factors as weighting functions. Moreover, since the parameter can take values which cannot always be predicted in advance, approximate formulae for calculation of such integrals should be constructed in such a way that they contain this parameter in a letter format and they are suitable for calculation at any and particularly large values of the parameter. Computational rules with such properties are generally obtained by dividing

Адрес для переписки
Мелешко Иван Николаевич
Белорусский национальный технический университет
ул. Я. Коласа, 12/2,
220013, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 17 292-82-73
kafvm2@bntu.by

Address for correspondence
Melashko Ivan N.
Belarusian National Technical University
12/2, Ya. Kolasa str.,
220013, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: +375 17 292-82-73
kafvm2@bntu.by

an interval of integration into elementary while making successive approximation of the integral density at each elementary interval with polynomials of the first, second and third degrees and taking the oscillating factors as weighting functions. The paper considers the variant when density of the integrals at each elementary interval is approximated by a polynomial of zero degree that is a constant which is equal to the value of density in the middle of the interval. At the same time one approximate formula for calculation of an improper integral with infinite interval of the function with oscillating factor of a special type has been constructed in the paper. In this case it has been assumed that density of the improper integral rather quickly goes to zero when an argument module is increasing indefinitely. In other words it is considered as small to negligible outside some finite interval. Uniforms in parameter used for evaluation of errors in approximate formulae have been obtained in the paper and they make it possible to calculate integrals with the required accuracy.

Keywords: integrals, approximate integration, approximate formulas, oscillating function

For citation: Melashko I. N., Nifontova D. A., Sorokin U. U. (2017) Approximate Integration of Highly Oscillating Functions. *Science and Technique*. 16 (4), 343–347. DOI: 10.21122/2227-1031-2017-16-4-343-347 (in Russian)

Введение

При решении разных задач прикладной математики, механики, физики и техники приходится вычислять интегралы вида:

$$J_c(\lambda)=J_c(f;\ \lambda)=\int_{-T}^{T} f(t)\cos\lambda t dt; \tag{1}$$

$$J_s(\lambda)=J_s(f;\ \lambda)=\int_{-T}^{T} f(t)\sin\lambda t dt; \tag{2}$$

$$J_e(\lambda)=J_e(f;\ \lambda)=\int_{-T}^{T} f(t)e^{i\lambda t} dt; \tag{3}$$

$$J(\lambda)=J(f;\ \lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\lambda t} dt, \tag{4}$$

где λ – положительный числовой параметр [1–5].

Формулы для приближенного вычисления подобных интегралов строятся обычно путем разбиения промежутка интегрирования на элементарные с последующим приближением функции $f(t)$ на каждом элементарном промежутке многочленами первой, второй и третьей степеней, принимая при этом осциллирующие множители за весовые функции [6–10]. Авторами исследован тот вариант, когда функция $f(t)$ на элементарном промежутке аппроксимируется многочленом нулевой степени – константой, равной значению $f(t)$ в середине этого промежутка.

1. Зададим на промежутке $[-T,\ T]$ систему точек $t_k=kh;\ k=-n,\ \ldots,-1,0,1,\ \ldots,n;\quad h=\dfrac{2T}{2n+1}$ и аппроксимацию функции $f(t)$ на этом промежутке определим формулой

$$f(t)\approx\tilde f(t)=\sum_{k=-n}^{n}\theta_k(t)f(t_k), \tag{5}$$

в которой $\theta_k(t)=1$, если $t\in\left[t_k-\dfrac{h}{2},\ t_k+\dfrac{h}{2}\right]$, и $\theta_k(t)=0$, когда $t\notin\left[t_k-\dfrac{h}{2},\ t_k+\dfrac{h}{2}\right]$.

Нетрудно убедиться, что если $f(t)$ непрерывна на отрезке $[-T,\ T]$, то

$$\left|f(t)-\tilde f(t)\right|\le\omega(f;\ h),\ t\in[-T,T], \tag{6}$$

где $\omega(f;\ h)=\max\limits_{t',t''\in[-T,T]}\left|f(t'')-f(t')\right|$ – модуль непрерывности функции $f(t)$.

Если же $f(t)$ – непрерывно дифференцируемая функция на этом отрезке, то с помощью формулы Тейлора легко установить, что

$$\left|f(t)-\tilde f(t)\right|\le\frac{M_1}{2}h,\ t\in[-T,T], \tag{7}$$

где $M_1=\max\limits_{t\in[-T,T]}\left|f'(t)\right|$.

2. Подставив в (3) для интеграла $J_e(f;\ \lambda)$ вместо функции $f(t)$ ее приближение формулой (5), получим приближенное уравнение для этого интеграла

$$J_e(f;\ \lambda)\approx J_e(\tilde f;\ \lambda)=\tilde J_e(\lambda)=\sum_{k=-n}^{n}A_k^{(e)}(\lambda)f(t_k), \tag{8}$$

в котором коэффициенты $A_k^{(e)}(\lambda)=\int_{t_k-\frac{h}{2}}^{t_k+\frac{h}{2}}e^{i\lambda t}dt,$

$k=-n,\ \ldots,-1,0,1,\ \ldots,n$.

Вычислив интегралы в правой части последнего равенства и выполнив несложные преобразования, находим единое представление коэффициентов

$$A_k^{(e)}(\lambda)=\frac{2}{\lambda}\sin\frac{\lambda T}{2n+1}e^{i\lambda t_k}. \qquad (9)$$

Коэффициенты из (9) подставим в правую часть (8). В результате приближенная формула для интеграла (3) запишется в виде

$$J_e(f;\ \lambda)\approx 2\sum_{k=-n}^{n}\left(\sin\frac{\lambda T}{2n+1}\cdot\frac{e^{i\lambda t_k}}{\lambda}\right)f(t_k). \qquad (10)$$

Оценим погрешность приближенной формулы (10).

Теорема 1. *Если функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[-T,\ T]$, то для всех λ имеет место оценка погрешности*

$$\left|J_e(\lambda)-\tilde{J}_e(\lambda)\right|\le 2T\omega(f;\ h). \qquad (11)$$

Если же $f(t)$ непрерывно дифференцируемая функция, то

$$\left|J_e(\lambda)-\tilde{J}_e(\lambda)\right|\le TM_1h. \qquad (12)$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\begin{aligned}\left|J_e(\lambda)-\tilde{J}_e(\lambda)\right|&=\left|J_e(f;\lambda)-J_e(\tilde{f};\lambda)\right|=\\&=\left|\int_{-T}^{T}\left[f(t)-\tilde{f}(t)\right]e^{i\lambda t}dt\right|\le\\&\le\max_{t\in[-T;\,T]}\left|f(t)-\tilde{f}(t)\right|\int_{-T}^{T}\left|e^{i\lambda t}\right|dt=\\&=2T\max_{t\in[-T;\,T]}\left|f(t)-\tilde{f}(t)\right|.\end{aligned} \qquad (13)$$

Из соотношений (13) и неравенств (6), (7) вытекают оценки (11), (12).

3. Заменим функцию $f(t)$ в интегралах (1), (2) по формуле (5). В результате получим следующие приближенные выражения для интегралов $J_c(f;\ \lambda)$, $J_s(f;\ \lambda)$:

$$J_c(f;\lambda)\approx J_c(\tilde{f};\ \lambda)=\tilde{J}_c(\lambda)=\sum_{k=-n}^{n}A_k^{(c)}(\lambda)\,f(t_k); \qquad (14)$$

$$J_s(f;\lambda)\approx J_s(\tilde{f};\ \lambda)=\tilde{J}_s(\lambda)=\sum_{k=-n}^{n}A_k^{(s)}(\lambda)\,f(t_k). \qquad (15)$$

Коэффициенты $A_k^{(c)}(\lambda)$ и $A_k^{(s)}(\lambda)$ соответственно равны:

$$A_k^{(c)}(\lambda)=\int_{t_k-\frac{h}{2}}^{t_k+\frac{h}{2}}\cos\lambda t dt;\ A_k^{(s)}(\lambda)=\int_{t_k-\frac{h}{2}}^{t_k+\frac{h}{2}}\sin\lambda t dt,$$
$$k=-n,\ \ldots,-1,\,0,\,1,\ \ldots,\ n.$$

Выделив действительную и мнимую части в формуле (9), находим следующие представления для этих коэффициентов:

$$A_k^{(c)}(\lambda)=\frac{2}{\lambda}\sin\frac{\lambda T}{2n+1}\cos\lambda t_k;$$
$$A_k^{(s)}(\lambda)=\frac{2}{\lambda}\sin\frac{\lambda T}{2n+1}\sin\lambda t_k,$$
$$k=-n,\ \ldots,-1,\,0,\,1,\ \ldots,\ n.$$

Подставим полученные выражения $A_k^{(c)}(\lambda)$ и $A_k^{(s)}(\lambda)$ в правые части (14) и (15) соответственно. В результате приближенные формулы для интегралов (1) и (2) запишутся в виде:

$$J_c(f;\ \lambda)\approx 2\sum_{k=-n}^{n}\left(\sin\frac{\lambda T}{2n+1}\cdot\frac{\cos\lambda t_k}{\lambda}\right)f(t_k); \qquad (16)$$

$$J_s(f;\ \lambda)\approx 2\sum_{k=-n}^{n}\left(\sin\frac{\lambda T}{2n+1}\cdot\frac{\sin\lambda t_k}{\lambda}\right)f(t_k). \qquad (17)$$

Погрешности приближенных формул (16), (17) можно сверху оценить теми же величинами, что и погрешность приближенного уравнения (10).

Теорема 2. *Пусть функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[-T,\ T]$. Тогда для всех λ справедливы неравенства:*

$$\begin{aligned}&\left|J_c(\lambda)-\tilde{J}_c(\lambda)\right|\le 2T\omega(f;\ h);\\&\left|J_s(\lambda)-\tilde{J}_s(\lambda)\right|\le 2T\omega(f;\ h).\end{aligned} \qquad (18)$$

Если же $f(t)$ является непрерывно дифференцируемой функцией на этом отрезке, то

$$\left|J_c(\lambda)-\tilde{J}_c(\lambda)\right|\le TM_1h,\ \left|J_s(\lambda)-\tilde{J}_s(\lambda)\right|\le TM_1h. \qquad (19)$$

Доказательство. Запишем очевидные соотношения:

$$\left|J_c(\lambda)-\tilde J_c(\lambda)\right|=\left|J_c(f;\lambda)-J_c(\tilde f;\lambda)\right|=\left|\int_{-T}^{T}\left[f(t)-\tilde f(t)\right]\cos\lambda t dt\right|\le\max_{t\in[-T;T]}\left|f(t)-\tilde f(t)\right|\int_{-T}^{T}\left|\cos\lambda t\right|dt\le$$
$$\le 2T\max_{t\in[-T;T]}\left|f(t)-\tilde f(t)\right|;$$
$$\left|J_s(\lambda)-\tilde J_s(\lambda)\right|=\left|J_s(f;\lambda)-J_s(\tilde f;\lambda)\right|=\left|\int_{-T}^{T}\left[f(t)-\tilde f(t)\right]\sin\lambda t dt\right|\le\max_{t\in[-T;T]}\left|f(t)-\tilde f(t)\right|\int_{-T}^{T}\left|\sin\lambda t\right|dt\le$$
$$\le 2T\max_{t\in[-T;T]}\left|f(t)-\tilde f(t)\right|. \qquad (20)$$

Оценивая в (20) $\max_{t\in[-T;T]}\left|f(t)-\tilde f(t)\right|$ с помощью (6), (7), получаем неравенства (18), (19).

4. Предположим, что функция $f(t)$ в интеграле (4) достаточно быстро стремится к нулю при $|t|\to\infty$. Тогда, считая ее пренебрежимо малой вне некоторого конечного отрезка $[-T, T]$, в пределах заданной точности справедливо приближенное равенство

$$J(\lambda)=\int_{-T}^{T}f(t)e^{i\lambda t}dt=J_e(\lambda). \qquad (21)$$

Подставив в (21) приближенное представление интеграла (3) формулой (10), получаем приближенное уравнение для интеграла (4)

$$J(\lambda)\approx\tilde J_e(\lambda)=2\sum_{k=-n}^{n}\left(\sin\frac{\lambda T}{2n+1}\cdot\frac{e^{i\lambda t_k}}{\lambda}\right)f(t_k). \qquad (22)$$

При оценке погрешности приближенной формулы (22) следует учитывать погрешность приближенного уравнения (21). Будем предполагать, что при больших значениях $|t|$ выполняется неравенство

$$|f(t)|=\frac{C}{|t|^{1+\delta}},\ 0<C<\infty,\ \delta>0. \qquad (23)$$

Тогда

$$\left|J(\lambda)-\tilde J_e(\lambda)\right|=\left|\int_{-\infty}^{-T}f(t)e^{i\lambda t}dt+\int_{T}^{\infty}f(t)e^{i\lambda t}dt\right|\le$$
$$\le 2\int_{T}^{\infty}f(t)dt\le 2C\int_{T}^{\infty}\frac{dt}{t^{1+\delta}}=\frac{2C}{\delta T^{\delta}}. \qquad (24)$$

Далее

$$\left|J(\lambda)-\tilde J_e(\lambda)\right|=\left|J(\lambda)-J_e(\lambda)+J_e(\lambda)-\tilde J_e(\lambda)\right|\le$$
$$\le\left|J(\lambda)-J_e(\lambda)\right|+\left|J_e(\lambda)-\tilde J_e(\lambda)\right|.$$

Если функция $f(t)$ имеет непрерывную производную на промежутке $[-T,\ T]$, то с учетом неравенства (12) теоремы 1 приходим к следующей оценке погрешности приближенной формулы (22):

$$\left|J(\lambda)-\tilde J_e(\lambda)\right|\le\frac{2C}{\delta T^{\delta}}+TM_1h.$$

Примечание. Очевидно, что приближенную формулу (22) и оценку ее погрешности можно использовать для вычисления интеграла (4) только в том случае, когда функция $f(t)$ достаточно быстро убывает с возрастанием $|t|$ (δ достаточно велико).

5. **Пример.** Коэффициенты тригонометрического ряда Фурье функции $f(t)=e^t$ определяются формулами:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^t\cos mt dt=\frac{(-1)^m\,2\mathrm{sh}\pi}{\pi\left(1+m^2\right)}\qquad\left(J_c\left(\frac{e^t}{\pi},m\right)\right);$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^t\sin mt dt=\frac{(-1)^{m+1}\,2m\mathrm{sh}\pi}{\pi\left(1+m^2\right)}\qquad\left(J_s\left(\frac{e^t}{\pi},m\right)\right).$$

Результаты численного эксперимента по точным формулам и с помощью приближенных уравнений (16), (17) при n = 100 приведены в табл. 1

Таблица 1

m	$J_c(m)$	$\tilde J_c(m)$	$J_s(m)$	$\tilde J_s(m)$
1	–3,6760800	–3,6756300	3,6760800	3,6762300
10	0,0727936	0,0721969	–0,7279360	–0,7279660
100	0,0007351	0,0007262	–0,0735142	–0,0735126

Примечание. Предположим, что значения функции $f(x)$ в узлах квадратурной формулы (8) вычисляются приближенно, т. е. вместо $f(t_k)$ имеем $\tilde f(t_k)$, так что погрешность вычисления равна $\varepsilon_k = f(t_k) - \tilde{f}(t_k)$. Пусть $|\varepsilon_k| \le \varepsilon$, $k = -n, ..., -1, 0, 1, ... n$. Тогда для погрешности вычисления квадратурной суммы в (8) получается неравенство

$$\left| \sum_{-n}^{n} A_k^{(e)}(\lambda) f(t_k) - \sum_{-n}^{n} A_k^{(e)}(\lambda) \tilde{f}(t_k) \right| \le \varepsilon \sum_{-n}^{n} |A_k(\lambda)|,$$

из которого следует, что точная верхняя граница погрешности вычисления квадратурной суммы в (8) пропорциональна $\sum_{-n}^{n} \left| A_k^{(e)}(\lambda) \right|$.

Оценим эту сумму числом, не зависящим от λ:

$$\sum_{-n}^{n} \left| A_k^{(e)}(\lambda) \right| = \sum_{-n}^{n} \left| \int_{t_k - \frac{h}{2}}^{t_k + \frac{h}{2}} e^{i\lambda t} dt \right| \le \sum_{-n}^{n} \int_{t_k - \frac{h}{2}}^{t_k + \frac{h}{2}} \left| e^{i\lambda t} \right| dt =$$

$$= \sum_{-n}^{n} \int_{t_k - \frac{h}{2}}^{t_k + \frac{h}{2}} dt = 2T.$$

Следовательно, при всех λ справедлива оценка

$$\left| \sum_{-n}^{n} A_k^{(e)}(\lambda) f(t_k) - \sum_{-n}^{n} A_k^{(e)}(\lambda) \tilde{f}(t_k) \right| \le \varepsilon 2T.$$

Очевидно, что погрешности в вычислениях квадратурных сумм (14), (15) оцениваются такой же величиной. Это означает, что при больших n погрешности в вычислениях упомянутых квадратурных сумм имеют тот же порядок, что и погрешность в вычислении функции $f(t)$. В таких случаях говорят, что квадратурные формулы численно устойчивы.

ВЫВОДЫ

1. Для численного интегрирования функций, содержащих сильно осциллирующие множители специального вида с параметром, построены простейшие приближенные формулы.

2. Попутно сконструирована одна приближенная формула для вычисления несобственного интеграла по бесконечному промежутку от функции с осциллирующим множителем специального вида в случае, когда плотность несобственного интеграла достаточно быстро стремится к нулю при неограниченном возрастании модуля аргумента.

3. Получены равномерные по параметру оценки погрешностей приближенных формул, позволяющие вычислять интегралы с заданной точностью. Приведен численный анализ квадратурных сумм на устойчивость.

ЛИТЕРАТУРА

1. Канторович, Л. В. Приближенные методы высшего анализа / Л. В. Канторович, В. И. Крылов. М.; Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.
2. Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. М.: Наука, 1973. 736 с.
3. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. М.: Наука, 1970. Т. 3. 656 с.
4. Боголюбов, А. Н. Задачи по математической физике / А. Н. Боголюбов, В. В. Кравцов. М.: Изд-во МГУ, 1988. 349.
5. Ланцош, К. Практические методы прикладного анализа / К. Ланцош. М.: Физматгиз, 1956. 524 с.
6. Крылов, В. И. Приближенное вычисление интегралов / В. И. Крылов. М.: Наука, 1967. 500 с.
7. Крылов, В. И. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа / В. И. Крылов, Н. С. Скобля. М.: Наука, 1974. 224 с.
8. Завьялов, Н. С. Методы сплайн-функций / Н. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. П. Мирошниченко. М.: Наука, 1980. 352 с.
9. Бахвалов, Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. М.: Наука, 1987. 598 с.
10. Калиткин, Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. М.: Наука, 1978. 512 с.

Поступила 16.03.2016
Подписана в печать 27.05.2016
Опубликована онлайн 28.07.2017

REFERENCES

1. Kantarovich L. V., Krylov V. I. (1962) *Approximate Methods for Highest Analysis*. Moscow-Leningrad, Phizmatgiz Publ. 708 (in Russian).
2. Lavrentiev M. A., Shabat B. V. (1973) *Methods for Theory of Functions of a Complex Variable*. Moscow, Nauka Publ. 736 (in Russian).
3. Fikhtengolts G. M. (1970) *Calculus course. Vol. 3*. Moscow, Nauka Publ. 656 (in Russian).
4. Bogolyubov A. N., Kravtsov V. V. (1988) *Exercises in Mathematical Physics*. Moscow, Moscow State University. 349 (in Russian).
5. Lantsosh K. (1956) *Practical Methods for Application Analysis*. Moscow, Phizmatgiz Publ. 524 (in Russian).
6. Krylov V. I. (1967) *Integral Approximation*. Moscow, Nauka Publ. 500 (in Russian).
7. Krylov V. I., Skoblya N. S. (1974) *Methods of Approximate Fourier Transformation and Inverse Laplace Transform*. Moscow, Nauka Publ. 224 (in Russian).
8. Zavyalov N. S,. Kvasov B. I., Miroshnichenko V. P. (1980) *Methods of Spline-Functions*. Moscow, Nauka Publ. 352 (in Russian).
9. Bakhvalov N. S., Zhidkov N. P., Kobelkov G. M. (1987) *Numerical Technique*. Moscow, Nauka Publ. 598 (in Russian).
10. Kalitkin N. N. (1978) *Numerical Technique*. Moscow, Nauka Publ. 512 (in Russian).

Received: 16.03.2016
Accepted: 27.05.2016
Published online: 28.07.2017